

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»
Український державний університет науки і технологій
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Коряшкіна Лариса Сергіївна

УДК 004.9: 591.85: 519.863: 629.039.58

ДИСЕРТАЦІЯ

Математичні моделі та методи зонування і розміщення об'єктів в системах
екстреної логістики

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Технічні науки

Подається на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук
Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

Л.С. Коряшкіна

Дніпро – 2024

АНОТАЦІЯ

Коряшкіна Л.С. Математичні моделі та методи зонування і розміщення об'єктів в системах екстреної логістики. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи (технічні науки) – Національний технічний університет «Дніпровська політехніка» МОН України, Український державний університет науки і технологій МОН України, Дніпро, 2024.

У дисертаційній роботі вирішено важливу науково-прикладну проблему розробки ефективних математичних моделей процесів розподілу матеріальних ресурсів в транспортно-логістичних системах в умовах техногенних надзвичайних ситуацій, вдосконалення на їх основі методів та засобів математичного та комп'ютерного моделювання раціонального територіального розміщення елементів систем екстреної логістики.

У першому розділі здійснено аналіз досліджень, пов'язаних з розробкою інформаційних технологій для ефективного функціонування логістичних систем, математичним моделюванням і методами розв'язання оптимізаційних задач екстреної і гуманітарної логістики; розглянуто роботи, в яких розв'язуються задачі територіального розміщення логістичних об'єктів. Обґрунтовано необхідність використання геоінформаційних технологій і розширення функціональності сучасних ГІС щодо зонування території за критерієм відстані задля врахування потужності центрів і можливості перекриття зон їх обслуговування.

У другому розділі вперше, використовуючи основні положення теорії неперервних задач оптимального розбиття множин (ОРМ), розроблено математичні моделі і методи розв'язання задач оптимального мультиплексного розбиття множин (ОМРМ), які на відміну від вищезгаданих, під час опису процесу розподілу споживачів між сервісними центрами

враховують можливість надавати послуги будь-яким з декількох найближчих до споживачів центрів обслуговування. Такими центрами можуть бути служби соціального захисту, склади аварійного постачання й розподілу предметів першої необхідності та ін. Передбачено: 1) можливість перекриття зон на той випадок, коли найближчий центр не зможе надати послугу; 2) оптимальне розміщення певної кількості нових центрів системи екстреної логістики, коли можливості функціонуючих не задовольняють потреби всього регіону. Вперше теоретично обґрунтовано і підтверджено результатами обчислювальних експериментів, що моделі і методи ОМРМ надають можливість будувати діаграми Вороного вищих порядків та їх узагальнення, що дозволяє на основі єдиного підходу конструювати зазначені структури і використовувати їх в геопросторовому аналізі даних.

У третьому розділі розроблено математичні моделі і методи розв'язування задач оптимального розміщення сервісних центрів з метою мінімізації часу надання послуги найвіддаленішому споживачу заданого регіону. Моделями є неперервні задачі оптимального багатократного кульового покриття обмеженої двовимірної множини за певних умов розміщення центрів, що утворюють покриття. Методи багатократного кульового покриття розроблені з використанням елементів теорії неперервних задач оптимального розбиття множин і передбачають редукцію до задач умовної оптимізації недиференційованих функцій, для розв'язування яких залучається апарат штрафних функцій та субградієнтні методи. Розроблено методи розв'язання задач оптимального багатократного кульового покриття, котрі, на відміну від раніше відомих, враховують особливості множини, на якій можуть бути розміщені центри, що сприяє підвищенню оперативності та обґрунтованості прийняття рішень про вибір місць розташування підрозділів систем екстреної логістики на базі існуючих об'єктів, а також забезпечує уникнення розташування центрів занадто близько один від одного.

В четвертому розділі вперше обґрунтовано доцільність використання математичних моделей і методів розв'язання неперервних задач оптимального

розбиття континуальної множини з додатковими зв'язками (ОРМДЗ) під час дослідження двоетапних задач екстреної і гуманітарної логістики. Продемонстрована універсальність вказаних моделей за рахунок використання їх для опису як евакуаційних процесів з організацією збірних, проміжних і приймальних пунктів евакуації, так і процесів, пов'язаних з наданням первинної допомоги, розраховуючи і доставляючи відповідну кількість продуктів першої необхідності з існуючих складів через розподільчі центри в райони техногенної НС. Вперше розроблені математичні моделі задач частково-двоетапного розподілу матеріальних ресурсів в багаторівневих логістичних системах, які враховують напрям руху потоку і можливість доставки частини ресурсу безпосередньо до кінцевих пунктів, що дозволяє описувати та розв'язувати широке коло логістичних задач, створювати на їх основі нові інформаційні технології раціонального управління матеріальними потоками в багаторівневих структурах. На модельних прикладах двоетапних задач оптимального розподілу матеріальних ресурсів за рахунок використання розробленого математичного і алгоритмічного забезпечення досягнуто зниження до 20% сукупних транспортних витрат.

П'ятий розділ присвячено опису багатофункціонального програмного додатку, в якому поєднані алгоритми всіх розроблених в дисертації методів з можливістю підключення ГІС-технологій для отримання вихідних даних про реальні транспортні шляхи, відстані між географічними об'єктами. Впровадження розробленого програмного продукту дозволяє планувати завчасні соціально-економічні та організаційно-технічні заходи, спрямовані на підвищення техногенної безпеки, зокрема на підприємствах гірничо-металургійної галузі.

У шостому розділі, використовуючи метод FRAM, створено модель транспортного процесу, запропоновано методику оцінювання функціональних її елементів, що дозволяє досліджувати сукупний вплив різних факторів техногенного, природного та соціального походження на транспортний процес, розробити рекомендації щодо запобігання небажаних подій. Зокрема,

для пасажирських автомобільних перевезень показано, що впровадження додаткового дистанційного контролю над певними діями або учасниками транспортного процесу знижує ризик виникнення інциденту на 15-20%. Розроблено математичні моделі оптимального вибору сукупності запобіжних/захисних заходів, які дозволяють знизити рівень професійного ризику до прийнятних норм за критеріями: мінімізація витрат, максимізації ефективності вкладення коштів, мінімізація кількості заходів. Показано, що ефективність витрат на заходи може зрости на 30% – 99%, а самі витрати зменшитися на 8% – 24% у порівнянні з ефективністю і кошторисом мінімальної кількості можливих заходів, які забезпечують прийнятний рівень ризику.

Набули подальшого розвитку: 1) теорія неперервних задач ОРМ за рахунок введення нового класу задач, в котрих передбачена побудова мультиплексного розбиття, що дозволяє підвищити повноту відображення спільного обслуговування мережею сервісних центрів споживачів, неперервно розподілених на певній території; 2) теорія багатоетапних задач транспортного типу за рахунок побудови нових моделей, які враховують напрям руху матеріальних потоків, обмежені потужності логістичних центрів, витрати на їх організацію, що дозволяє комплексно розв'язувати задачі розміщення об'єктів систем екстреної логістики і розподілу ресурсів в процесі їх транспортування від місць вихідного потоку до кінцевих споживачів, посилювати синергетичний ефект прийняття управлінських рішень в соціально-технічних системах; 3) методологічні основи створення та використання засобів комп'ютерного моделювання за рахунок інтеграції сучасних ГІС та математичного забезпечення неперервних задач оптимального мультиплексного розбиття множин і задач розміщення-розподілу, що дозволяє вирішити на цій основі важливу науково-прикладну проблему прийняття аргументованих рішень щодо розташування об'єктів систем екстреної логістики і визначення матеріальних потоків у випадку техногенних надзвичайних ситуацій.

Практична значущість дисертаційного дослідження полягає у створенні багатофункціонального програмного додатку, в якому поєднані алгоритми всіх розроблених методів з можливістю підключення ГІС-технологій для отримання даних про транспортні шляхи та відстані між об'єктами, що дозволяє раціонально за територіальним та часовим критеріями розподіляти матеріальні ресурси між наявними або новими оптимально розміщеними центрами з урахуванням їх можливостей.

На основі результатів, які отримано в процесі дисертаційного дослідження, розроблено наступні методики та рекомендації: «Методика оптимального розподілу матеріальних потоків між структурними елементами багатоетапного виробництва», «Методика оптимального розміщення підрозділів системи екстреної логістики на випадок надзвичайної ситуації», «Методика раціонального вибору місць розміщення рятувальних служб на випадок техногенних аварій», «Рекомендації щодо оптимального розташування нових підрозділів систем екстреної логістики та перерозподіл їх навантаження», «Рекомендації щодо розробки науково-освітньої платформи для розв'язання актуальних проблем у сфері логістики, у тому числі гуманітарної». Розроблені методики і рекомендації впроваджено в навчальний процес підготовки студентів і аспірантів за напрямом 124 Системний аналіз у Національному технічному університеті «Дніпровська політехніка», в Інституті геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова, Придніпровському науковому центрі НАН України та МОН України, ТОВ «Шахтостроймонтаж», ТОВ «Донбассшахтпроект».

Ключові слова: зонування території, розміщення об'єктів, задачі розміщення-розподілу, системи екстреної логістики, математичне моделювання, неперервні задачі оптимального розбиття множин, мультиплексне розбиття, багатократне покриття множин, ГІС-технології.

ПЕРЕЛІК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті у наукових виданнях, включених до Переліку наукових фахових видань України:

1. Коряшкіна Л.С. Розширення одного класу нескінченновимірних оптимізаційних задач / Л.С. Коряшкіна // Вісн. Черкаського ун-ту. Сер. Прикл. матем. Інф. – 2015. – № 18 (351). – С. 28 – 36.

2. Koriashkina L.S. Continuous problems of optimal multiplex-partitioning of sets without constraints and solving methods / L.S. Koriashkina, A.P. Cherevatenko // Journal of Computational & Applied Mathematics. – 2015. – № 2 (119). – P. 15 – 32.

3. Коряшкіна Л.С. Неперервні лінійні задачі оптимального мультиплексного розбиття множин з обмеженнями / Л.С.Коряшкіна, А.П. Череватенко // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, Серія «Мат. моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», 2015. – Вип. 28. – С. 77 – 91.

4. Koriashkina L.S. The problem of multi-zone dynamics systems parametric identification / L.S. Koriashkina, A.P. Cherevatenko // System technologies. N 4(99) – Dnipropetrovsk, 2015.– P.88 – 101.

5. Коряшкіна Л. С. Оптимальні діаграми Вороного вищих порядків обмежених множин та алгоритми їх побудови / Л.С. Коряшкіна, А.П. Череватенко // Вісник Черкаського університету. Серія Прикладна математика. Інформатика. – 2016. – №. 1 – 2. – С. 59 – 76.

6. Коряшкіна Л.С. Інтеграція ГІС-технологій і методів розв'язання неперервних задач оптимального мультиплексного розбиття множин / Л.С. Коряшкіна, А.П. Череватенко, Е.О. Коряшкіна // Системні дослідження та інформаційні технології, 2017, № 4. С. 97–108. DOI:10.20535/SRIT.2308-8893.2017.4.08

7. Коряшкіна Л.С. Моделювання зон сервісного обслуговування на заданій території / Л.С. Коряшкіна, М.М. Одновол, А.П. Череватенко, О.О.

Михальова // Вісник Херсонського національного технічного університету. – Херсон: ХНТУ, 2017. – Вип. 3(62). Т. 2. – С.109–117.

8. Коряшкіна Л.С. Інтерактивна карта оптимального мультиплексного розбиття заданого регіону / Л.С. Коряшкіна, О.О. Михальова, Б.Р. Свіріпа, А.П. Череватенко // Збірник наукових праць Національного гірничого університету / Нац. гірн. ун-т. – Дніпро: Вид-во НГУ, 2018. – № 55. – С. 274 – 287.

9. Khabarlak K.S. Mobile access control system based on RFID tags and facial information / K.S. Khabarlak, L.S. Koriashkina // Bulletin of National Technical University “KhPI”. Series: System Analysis, Control and Information Technologies. – 2020. – Vol. 2. – № 4. – P. 69-74. – DOI: 10.20998/2079-0023.2020.02.12.

10. Коряшкіна Л. Алгоритми територіальної сегментації для мережі сервісних центрів з перекриттям зон обслуговування / Л. Коряшкіна, М. Сазонова, М. Одновол // Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security. – 2023. – № 2. С. – 12 – 25.

11. Дзюба С. Математичні моделі оптимізаційних задач частково-двоетапної евакуації населення із зонуванням постраждалої території / С. Дзюба, Л. Коряшкіна, О. Станіна, Лубенець Д. // Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security, 2023. – № 3. – С. 13 – 21.

12. Коряшкіна Л. С. Математичні моделі та методи розміщення об’єктів із зонуванням території в системах екстреної логістики / Л.С. Коряшкіна, С.В. Дзюба // System technologies, 2023. Vol. 6 (149), No. 149.– P.107 – 122. DOI10.34185/1562-9945-6-149-2023-09

13. Коряшкіна Л.С. Математичні моделі та методи мультиплексного розбиття і багатократного покриття множин для задач розміщення-розподілу / Л. Коряшкіна, Д. Лубенець // Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security. – 2023. – № 4. С. – 12 – 25.

14. Коряшкіна Л.С. Системний аналіз та математичне моделювання частково-двоетапних процесів розподілу матеріальних потоків / Л. Коряшкіна, Д. Лубенець // System technologies, 2024. Vol. 1, No. 150.— P.86 – 99. DOI 10.34185/1562-9945-1-150-2024-08

Статті у періодичних виданнях, включених до категорії «А» Переліку наукових фахових видань України, або у закордонних виданнях, проіндексованих у базах даних Web of Science Core Collection та/або Scopus:

15. Koriashkina L.S. One way to solve problems of multi-zone dynamics models identification / L.S. Koriashkina, A. Pravdivy, A.P. Cherevatenko. – Power Engineering, Control & Information Technologies in Geotechnical Systems – CRC Press/ Balkema - Taylor & Francis Group. – 2015. – P. 153 – 160. (**Scopus**)

16. Cheberiachko Yu.I. Developing a mathematical model of linkage parameters of air flow in a filter box / Yu.I. Cheberiachko, I.M.Cheberiachko, M.M.Odnovol, L.S.Koriashkina // Scientific Bulletin of National Mining University, 2019. – № 3. – С. 99 – 105. (**Scopus Q2**)

17. Khabarlak K.S. Scoping adversarial attack for improving its quality / K.S. Khabarlak, L.S. Koriashkina // Radio Electronics, Computer Science, Control. – 2019. – № 2. – P. 108-118. – DOI: 10.15588/1607-3274-2019-2-12. (**WoS Q3**)

18. Koriashkina L.S. On the influence of the number of aggregates and free particles on the subsidence of loess soils / L.S. Koriashkina, T.P. Mokritska, O.V. Bondar, M.M. Odnovol // Scientific Bulletin of National Mining University, 2018. – № 5. – С. 5 – 12. <https://doi.org/10.29202/nvngu/2018-5/2> (**Scopus Q3, WoS**)

19. Us S. A. An optimal two-stage allocation of material flows in a transport-logistic system with continuously distributed resource / S.A. Us, L.S. Koriashkina, O.D. Stanina // Radio Electronics, Computer Science, Control, 2019. – Issue 1. – P. 256 – 268. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2019-1-24> (**WoS Q3**)

20. Koriashkina L.S On determining productive capacity of EV traction battery repair area / L.S. Koriashkina, O.V. Deryugin, S.O. Fedoriachenko, S.I. Cheberiachko, M.A. Vesela // Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho

Universytetu, 2019. – № 5. – С. 113 – 121. <https://doi.org/10.29202/nvngu/2019-5/17> (**Scopus Q3**)

21. Bulat A. Solution of the problem to optimize two-stage allocation of the material flows / A. Bulat, S. Dziuba, S. Minieiev, L. Koriashkina, S. Us // Mining of Mineral Deposits, Vol. 14 (2020), Issue 1, 27 – 35. doi.org/10.33271/mining14.01.027 (**Scopus Q2, Web of Science**)

22. Koriashkina L.S. Rational organization of the work of an electric vehicle maintenance station / L.S. Koriashkina, S.I. Cheberiyachko, O.V. Deryugin, M.M. Odnovol // Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu, 2020. – № 14(1). – P. 136-142. (**Scopus Q2, Web of Science**)

23. Avramenko S.E. Guided hybrid genetic algorithm for solving global optimization problems / S.E. Avramenko, T.A. Zheldak, L.S. Koriashkina // Radio Electronics, Computer Science, Control. – 2021. – № 2. – P. 174 – 188. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2021-2-18>. (**Web of Science Q3**)

24. Khabarлак K. Fast facial landmark detection and applications: A survey / K. Khabarлак, L. Koriashkina // Journal of Computer Science and Technology. – 2022. – Vol. 22. – № 1. – P. 12-41. – DOI: 10.24215/16666038.22.e02. (**Scopus Q2, WoS**)

25. Bazaluk O. Functional Resonance Analysis Method for Incident Risk Assessment During Passenger Road Transportation. / Bazaluk, O., Koriashkina, L., Cheberyachko, S., Deryugin, O., Odnovol, M., Lozynskyi, V., Nesterova, O. DOI: 10.1016/j.heliyon.2022.e11814 (**Scopus Q1, Web of Science**)

26. Koriashkina L. Two-stage problems of optimal location and distribution of the humanitarian logistics system's structural subdivisions / L. Koriashkina, S. Us, M. Odnovol, O. Stanina, S. Dziuba // Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu, 2024. – № 1. P. 130 – 139. <https://doi.org/10.33271/nvngu/2024-1/130> (**Scopus Q3, Web of Science**)

Монографії (розділи у колективних монографіях):

27. Станіна О.Д. Моделі та методи розв'язання задач оптимального розміщення двоетапного виробництва з неперервно розподіленим ресурсом: монограф. / О.Д. Станіна, С.А. Ус, Л.С. Коряшкіна / Дніпро, вид-ць «Свідлер А.Л.», 2021. – 200 с.

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

28. Коряшкіна Л.С. Про розв'язання неперервних задач оптимального мультиплексного розбиття множин з обмеженнями / Л.С. Коряшкіна, А.П. Череватенко // Зб. наук. праць XXI Всеукраїнської наук. конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (APAMCS – 2015), 24 – 25 вересня 2015 р. – Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2015. – С. 189 – 190.

29. Коряшкіна Л.С. Неперервна задача багатократного мінімального кульового покриття із «регуляризацією» функціоналу / Л.С. Коряшкіна, О.О. Михальова // Тези доповідей Міжнародної наукової школи-семінару «Питання оптимізації обчислень». – 21 – 25 вересня 2015. – С. 112.

30. Коряшкіна Л.С. Узагальнення одного класу задач нескінченновимірних математичного програмування / Л.С. Коряшкіна // Математичне та імітаційне моделювання систем. МОДС 2015: тези допов. Десятої міжнар. наук.-практ. конф., 22 – 26 червня 2015 р. – Чернігів: ЧНТУ, 2015. – С. 160 – 164.

31. Михальова О.О. Задачі оптимального багатократного кульового покриття та мультиплексне розбиття множин / О.О. Михальова, Л.С. Коряшкіна // Зб. наук. праць XXI Всеукраїнської наук. конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (APAMCS – 2015), 24–25 вересня 2015 р. – Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2015. – С. 227 – 229.

32. Коряшкіна Л.С. Метод розв'язання неперервної лінійної задачі оптимального мультиплексного розбиття множин з обмеженнями / Л.С. Коряшкіна, А.П. Череватенко // Зб. праць Другої Всеукраїнської наук.-техніч.

конф. "Інформатика, управління та штучний інтелект (ІУШІ-2015)", 26 – 27 листопада 2015 р. Харків : НТУ "ХПІ", 2015. – С. 46.

33. Коряшкіна Л.С. Про один підхід до територіальної сегментації ринку послуг / Л.С. Коряшкіна, А.П. Череватенко // Сучасні інформаційні та комунікаційні технології на транспорті, в промисловості та освіті: зб. матеріалів Міжнар. наук.-практ. конф., 16 – 17 грудня 2015 р. – Дн-ск: ДНУЗТ ім. В.А. Лазаряна, 2015. – С. 81.

34. Коряшкіна Л.С. Оптимальні діаграми Вороного вищих порядків обмежених множин та алгоритми їх побудови / Л.С. Коряшкіна, А.П. Череватенко // Математичне та імітаційне моделювання систем. МОДС 2016 : тези доповідей Однієї міжнародної науково-практичної конференції (Жукин, 27 червня - 1 липня 2016 р.) / М-во осв. і наук. України, Нац. Акад. наук України, Академія техно- логічних наук України, Інженерна академія України та ін. - Чернігів : ЧНТУ, 2016. – С. 332 – 334.

35. Коряшкіна Л.С. Про програмну реалізацію алгоритмів оптимального мультиплексного розбиття множин сумісно з ГІС- технологіями під час розв'язання задач сегментації ринку послуг / Л.С. Коряшкіна, А.П. Череватенко // Сучасні інформаційні та комунікаційні технології на транспорті, в промисловості та освіті, 14 – 15 грудня 2016 р.: Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції. - Д.: ДНУЖДТ ім. Лазаряна, 2016. - С. 52 – 53.

36. Коряшкіна Л.С. Моделювання зон сервісного обслуговування у заданому регіоні / Л.С. Коряшкіна, А.П. Череватенко, Н.Н. Одновол, О.О. Міхальова // XVIII Міжнародна конференція з математичного моделювання (МКММ-2017) [Збірка тез (18-22 вересня 2017 р., м. Херсон)]. – Херсон: ХНТУ, 2017. – С. – 20 – 21.

37. Коряшкіна Л.С. Моделювання зон сервісного обслуговування на заданій території / Л.С. Коряшкіна, А.П. Череватенко // Проблеми інформатики та моделювання (ПІМ-2017). Тезиси сімнадцятої міжнародної науково-технічної конференції. – Харків: НТУ "ХПІ", 2017. – С. 43.

38. Череватенко А.П. Інформаційна технологія територіальної сегментації ринку послуг / А.П. Череватенко, Л.С. Коряшкіна // Комп'ютерне моделювання та оптимізація складних систем (КМОСС-2019): матеріали V Міжнародної науково-технічної конференції (м. Дніпро, 6-8 листопада 2019 року) / Міністерство освіти і науки України, Державний вищий навчальний заклад «Український державний хіміко-технологічний університет». – Дніпро: Баланс-клуб, 2019. – С. 226 – 227.

39. Ус С.А. Моделювання й оптимізація двоетапного транспортування ресурсу, неперервно розподіленого на заданій території / С.А. Ус, Л.С. Коряшкіна, О.Д. Станіна // Сучасні проблеми і досягнення в галузі радіотехніки, телекомунікацій та інформаційних технологій : Тези доповідей IX Міжнародної науково-практичної конференції (03–05 жовтня 2018 р., м. Запоріжжя) [Електронний ресурс] / Редкол. : Д. М. Піза, С. В. Морщавка. Електрон. дані. – Запоріжжя : ЗНТУ, 2018. – 1 електрон. опт. диск (DVD-ROM); 12 см. – С. 269 – 271.

40. Koriashkina L. Interactive map of optimal multiplex-partitioning of a given region / L. Koriashkina, A. Mikhalova, B. Sviripa, A. Cherevatenko // Information control systems and technologies: materials of the VII international scientific-practical conference (17th - 18 th september 2018, Odessa) / response for the publ.: V.V. Vychuzhanin. – Odessa: astroprint, 2018. – p. 244 – 247.

41. Ус С.А. Двоетапна неперервно-дискретна задача розподілу за наявністю фіксованих ланцюгів поставок / С.А. Ус, Л.С. Коряшкіна, О.Д. Станіна // Міжнародний науковий сімпозум «Інтелектуальні рішення». Теорія прийняття рішень: праці міжнар. школи-семінару, 15-20 квітня 2019 р., Ужгород / М-во освіти і науки України, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», та [ін]; наук. ред. Л.Ф. Гуляницький // Ужгород. – 2019 – С. 125 –126.

42. Blyuss B. An optimal two-stage distribution of material flow at the fuel and energy complex enterprises / B. Blyuss, L. Koriashkina, S. Us, S. Minieiev, S. Dziuba // E3S Web of Conferences, 109 (2019), International Conference Essays of

Mining Science and Practice, Dnipro, Ukraine, June 25-27, 2019, <https://doi.org/10.1051/e3sconf/201910900008> (індексована в наукометричній базі Scopus)

43. Міщенко М.І. Оптимізація логістичних зв'язків в системі двоетапного транспортування ресурсу, неперервно розподіленого на заданій території / М.І. Міщенко, Л.С. Коряшкіна, С.А. Ус, С.В. Дзюба // Транспортний комплекс України: Умови ефективного розвитку: матеріали VII Всеукр. Наук.-практ. Конф. М. Одеса, 2019, 31–33.

44. Коряшкіна Л.С. Перерозподіл навантаження в системі екстреної логістики за рахунок оптимального розміщення її нових підрозділів / Л.С. Коряшкіна, С.В. Дзюба // International scientific-practical conference “Modern trends and prospects for the development of science, education and society”: conference proceedings (Aarhus, Denmark, August 10, 2023). Aarhus, Denmark: Scholarly Publisher ICSSH, 2023. – С. 42 – 43.

45. Дзюба С.В. Обґрунтування розподілу елементів транспортно-логістичних систем у промислових регіонах України / Л.С. Коряшкіна, С.В. Дзюба // Потураївські читання: матеріали XX міжнарод. наук.-техн. конф., 27.01.2023. м. Дніпро: НТУ Дніпровська політехніка. 2023. – С. 23.

46. Сазанська І. О. Оптимізація процесу формування маршрутів із застосуванням алгоритму GRASP / І. О. Сазанська, Л.С. Коряшкіна // Інформаційні технології: теорія і практика: Тези доповідей VI-ї Всеукраїнської науково-практичної інтернет-конференції здобувачів вищої освіти і молодих учених, 2023 р., м. Харків) [Електронний ресурс] / Редкол.: М. В. Новожилова, І.О. Яковлева, Н.М. Братерська, Г.В. Бакурова, Т.А. Желдак. Електрон. дані. – Харків : ХНУМГ імені О.М.Бекетова, 2023. – 1 електрон. опт. диск (DVD-ROM); 12 см. – С. 64 – 68.

47. Дзюба С.В. Моделювання багатоетапних процесів гуманітарної логістики / С.В. Дзюба, Л.С. Коряшкіна, Д. Кругліков // Матеріали II Міжнародної науково-практичної конференції «Логістика і транспортна

безпека: проблеми та перспективи розвитку в контексті аналізу сучасних викликів і загроз», м. Дніпро, 09.11.2023. – С. 74 – 79.

48. Коряшкіна Л.С. Інформаційна технологія територіальної сегментації в системах екстреної логістики / Л.С. Коряшкіна // Сучасні виклики та актуальні проблеми науки, освіти, технологій та суспільства: збірник тез доповідей міжнародної науково-практичної конференції (Біла Церква, 1.11.2023 р.): у 2 ч. Біла Церква: ЦФЕНД, 2023. Ч. 2. – С. 50 – 52.

49. Koriashkina L.S. Optimal choice of the objects for emergency service placement with area zoning: models and methods / L.S. Koriashkina // International scientific-practical conference “Science, education and technology: global trends and the regional aspect”: collection of materials (Tampere, Finland, February 3, 2024). Tampere, Finland: Scholarly Publisher ICSSH, 2024. – P. 43 – 44.

50. Дзюба С.В. Обґрунтування механізму управління логістичними потоками промислових підприємств. / С.В. Дзюба, Л.С. Коряшкіна // Потураївські читання: матеріали XXI міжнародної наук.-практ. Конф., м. Дніпро, 2020, Дніпро, НТУ Дніпровська політехніка, 18. – С. 25–26.

51. Лубенець Д.Є. Використання GIS технологій при розв’язанні оптимізаційних задач гуманітарної логістики / Д.Є. Лубенець, Л.С. Коряшкіна // Всеукраїнська інтернет-конференція «Економічна кібернетика: інструменти і методи дослідження та організації економічних процесів»: матеріали конференції (м. Дніпро, 1–2 березня, 2024). – С. 55–60.

Наукові праці, які додатково відображають наукові результати дисертації

52. Коряшкіна Л.С. Свідоцтво 64326 Україна про реєстрацію авторського права на твір Комп’ютерна програма “OPTIMAL MULTIPLEX-PARTITONING OF SETS” (OMPS-2015) [Текст] / Л.С. Коряшкіна, А.П. Череватенко (Україна). – № 64838; заявлено 31.12.15; зареєстровано 01.03.16 в Державному реєстрі свідоцтв про реєстрацію авторського права на твір.

53. Zelentsov D. Solving Continual Two-Stage Problems of Optimal Partition of Sets / D. Zelentsov, S. Us, L. Koryashkina, O. Stanina // International Journal of Research Studies in Computer Science and Engineering (IJRSCSE) Volume 4, Issue 4, 2017, 72–80. DOI: 10.20431/2349-4859.0404009 (***Index Copernicus***)

54. Koriashkina L. The continuous problems of the optimal multiplex partitioning an application of sets / L. Koriashkina, A. Cherevatenko, O. Mykhalova. – Power Engineering and Information Technologies in Technical Objects Control – Pivnyak, Beshta & Alekseyev (eds). – Taylor & Francis Group, London. – 2016. – P. 233 – 239.

55. Коряшкіна Л.С. Визначення оптимальної кількості та місць розміщення зарядних станцій для електромобілів на території міста / Л. С. Коряшкіна, О. Р. Беляєв // Комп'ютерне моделювання: аналіз, управління, оптимізація. – 2019. – № 1. – С. 23–29. DOI: 10.32434/2521-6406-2019-5-1-23-29 (***Index Copernicus***)

ABSTRACT

Koriashkina L.S. Mathematical models and methods for zoning and placing objects in emergency logistics systems. – Qualification research paper, manuscript.

Thesis for a Doctor Degree in Engineering Sciences in the Specialty 01.05.02 – Mathematical Modeling and Computational Methods (Technical Sciences) – Dnipro University of Technology Ministry of Education and Science of Ukraine, Ukrainian State University of Science and Technologies Ministry of Education and Science of Ukraine, Dnipro, 2024.

The dissertation addresses an important scientific and applied problem of developing effective mathematical models for the distribution of material resources in transport and logistics systems in conditions of technological emergencies, improving methods and tools for mathematical and computer modeling of rational territorial placement of elements of emergency logistics systems.

The first chapter provides an analysis of research related to the development of information technologies for the effective functioning of logistics systems, mathematical modeling, and methods for solving optimization problems in emergency and humanitarian logistics. It also discusses works that deal with the issues of territorial placement of logistics facilities. The necessity of using geoinformation technologies and expanding the functionality of modern GIS for zoning territories based on distance criteria is justified to take into account the capacity of centers and the potential overlap of their service zones.

In the second chapter, for the first time, using the fundamental principles of the theory of continuous problems of optimal set partitioning (ORP), mathematical models and solution methods for optimal multiplex set partitioning problems (OMSP) were developed. Unlike the aforementioned approaches, these models take into account the possibility of providing services by any of the several service centers closest to consumers during the process of distribution.

Based on this toolkit, one of the components of the mathematical support of information technology for territorial segmentation was developed. It includes models and methods for solving problems of optimal zoning of territories with the assignment of zones to specific centers or objects of socio-economic significance to provide services related to the organization of emergency and rescue work and other urgent tasks in the event of a threat of technological emergencies. Such centers may include social welfare services, emergency supply and distribution warehouses for essential goods, and more.

The following features were incorporated: 1) the possibility of overlapping zones in case the nearest center cannot provide the service; 2) optimal placement of a certain number of new centers in the emergency logistics system when the capabilities of existing centers do not meet the needs of the entire region.

For the first time, it was theoretically justified and experimentally confirmed that models and solution methods for continuous linear OMSP problems allow for the construction of higher-order Voronoi diagrams and their generalizations. This enables the construction of these structures based on a unified approach and their utilization in geospatial and intelligent data analysis.

In the third chapter, mathematical models and solution methods for optimal placement of service centers with the aim of minimizing service time to even the remotest consumer within a specified region were developed. The models involve continuous problems of optimal multiple circular coverage of a bounded two-dimensional set under certain conditions of center placement, which form the coverage.

The methods for multiple circular coverage were developed using elements from the theory of continuous set partitioning problems and involve the reduction to problems of constrained optimization of non-differentiable functions. The solution of these problems involves the use of penalty functions and subgradient methods. The dissertation has improved models and methods for solving optimal multiple spherical coverage problems by developing approaches that, unlike previously known methods, consider the characteristics of the set where centers can be located.

This enables faster and more justified decision-making regarding the selection of locations for emergency logistics units based on existing facilities and prevents the placement of centers too close to each other.

In the fourth chapter, for the first time, the theoretical justification of the expediency of using mathematical models and solution methods for continuous problems of optimal set partitioning with additional connections (ORPAC) was established during the study of two-stage problems in emergency and humanitarian logistics. The versatility of these models was demonstrated by using them to describe evacuation processes, considering the need for organizing collection, intermediate, and reception points for evacuation, as well as processes related to the provision of primary aid by calculating and delivering the necessary quantity of essential goods from existing warehouses through distribution centers to areas affected by technological emergencies.

Mathematical models for partially two-stage resource allocation problems in multi-level logistics systems were developed for the first time, taking into account the direction of resource flow and the possibility of delivering parts of the resources directly to the end points. This allows the description and solution of a wide range of logistical problems and the creation of new information technologies for rational management of material flows in multi-level structures.

Model examples of two-stage problems of optimal resource distribution showed that the use of the developed mathematical and algorithmic support resulted in a reduction of up to 20% in total transportation costs.

The fifth chapter is devoted to the description of a multifunctional software application that combines the algorithms of all developed methods in the dissertation, with the possibility of integrating GIS technologies to obtain input data on real transport routes and distances between geographical objects. The implementation of the developed software product allows for the planning of timely socio-economic and organizational-technical measures aimed at increasing technological safety, particularly in mining and metallurgical enterprises.

In the sixth chapter, using the FRAM method, a model of the transport process has been created, and a methodology for evaluating its functional elements has been proposed. This allows for the study of the overall impact of various factors of technological, natural, and social origin on the transport process and the development of recommendations for preventing undesirable events. In particular, for passenger carriages, it has been shown that the implementation of additional remote control over certain actions or participants in the transport process reduces the risk of an incident by 15-20%. Mathematical models for the optimal selection of a set of preventive/protective measures have been developed, which allow reducing the level of professional risk to acceptable standards according to criteria such as: minimizing costs, maximizing the efficiency of investment, and minimizing the number of measures. It has been shown that the efficiency of expenditure on measures can increase by 30%-99%, and the costs themselves can decrease by 8%-24% compared to the efficiency and budget of the minimum number of possible measures ensuring an acceptable level of risk.

Further developments have occurred in the following areas:

1. The theory of continuous ORP (Optimal Set Partitioning) problems has advanced by introducing a new class of problems that involve constructing a multiplex division. This increases the completeness of reflecting the joint servicing by a network of service centers for consumers continuously distributed over a certain territory.

2. The theory of multi-stage transportation problems has progressed by constructing new models that consider the direction of material flow, the limited capacities of logistic centers, and the costs of their organization. This allows for the comprehensive solution of problems related to the placement of objects in emergency logistics systems and the distribution of resources in the process of transporting them from the points of origin to the end consumers, enhancing the synergistic effect of decision-making in socio-technical systems.

3. The methodological foundations for creating and using information technologies have been established through the integration of modern GIS and

mathematical support for continuous OR problems and multi-stage placement-distribution problems. This approach addresses the problem of creating decision support systems for placing emergency logistics objects and distributing material flows in the event of man-made emergencies.

The practical significance of the dissertation research lies in the development of a multifunctional software application that combines the algorithms of all developed methods with the ability to connect GIS technologies to obtain data on transport routes and distances between objects. This allows for the rational distribution of material resources between existing or newly optimally located centers based on territorial and temporal criteria.

The methodologies and recommendations developed during this research have been implemented in the educational process for training students and graduate students in the field of Systems Analysis at the National Technical University "Dnipro Polytechnic," the M.S. Poliakov Institute of Geotechnical Mechanics, the Prydniprovskaya Scientific Center of the National Academy of Sciences and the Ministry of Education of Ukraine, TOV "Shahtostroymontazh," and TOV "DonbassShahtproekt."

Keywords: area zoning, object placement, location-allocation problems, emergency logistics systems, mathematical modeling, continuous partitioning problems, multiplex partitioning, multiple coverage of sets, GIS technologies

ЗМІСТ

	Стор.
ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ	30
ВСТУП	31
РОЗДІЛ I ОГЛЯД ПРОБЛЕМИ ТА НАУКОВИХ ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДОСЛІДЖЕНЬ	45
1.1. Екстрена логістика як напрям гуманітарної (соціальної) логістики. Концепція, завдання, принципи. Системи екстреної логістики.....	45
1.2. Сучасні оптимізаційні моделі і методи в системах екстреної логістики	50
1.3. Огляд публікацій з розв'язання задач раціонального територіального розподілу елементів систем цивільного захисту	52
1.4. Використання геоінформаційних систем і технологій для вирішення проблем обчислень, спричинених унікальними характеристиками евакуаційного трафіку	55
1.5. Важливість завчасного зонування території та планування запобіжних заходів на випадок потенційної техногенної аварії.....	63
1.6. Оптимальне розбиття і багатократне кульове покриття континуальних множин як математичний апарат для моделювання зон аварійного планування й реалізації захисних заходів, недосконалість моделей.....	68
1.7. Висновки за розділом I. Мета, задачі та методи досліджень	74
РОЗДІЛ II МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ЗОНУВАННЯ ТЕРИТОРІЙ ТА РОЗМІЩЕННЯ СКЛАДІВ АВАРІЙНОГО ПОСТАЧАННЯ Й РОЗПОДІЛУ ПРЕДМЕТІВ ПЕРШОЇ НЕОБХІДНОСТІ.....	76

2.1. Загальна постановка задачі оптимального зонування територій і розміщення захисних споруд або складів аварійного постачання й розподілу предметів першої необхідності.....	76
2.2. Математичні моделі оптимального зонування територій і розміщення захисних споруд або складів аварійного постачання й розподілу предметів першої необхідності.....	78
2.2.1. Математичне моделювання оптимізації територіального зонування з урахуванням можливості перекриття зон	78
2.2.2. Критерії якості мультиплексного розбиття множин та їх застосування в системах екстреної логістики.....	81
2.2.3. Окремі математичні постановки задач оптимального зонування територій	85
2.3. Моделювання і оптимізація зон в системах екстреної логістики з урахуванням існуючих складів аварійного постачання й розподілу предметів першої необхідності.....	88
2.3.1. Математичний опис задачі оптимізації зон відповідальності заданих центрів в системах екстреної логістики.....	88
2.3.2. Обґрунтування методу оптимізації зон відповідальності заданих центрів. Критерії оптимальності.....	88
2.3.3. Алгоритм оптимального зонування області. Теоретичне дослідження форми границь між зонами	95
2.4. Оптимальне розміщення складів аварійного постачання з одночасною сегментація території на зони їх відповідальності. Обмеження на потужності об'єктів відсутні.....	100
2.4.1. Задачі оптимального зонування території з розміщенням центрів та її математична постановка.....	100
2.4.2. Необхідні і достатні умови оптимальності. Зведення задачі нескінченновимірної оптимізації до задачі мінімізації функції декількох змінних	101
2.4.3. Розробка чисельного алгоритму розв'язання задачі	103

2.4.4. Експериментальне дослідження властивостей задачі та її оптимальних розв'язків.....	106
2.5. Оптимальна сегментація території на зони покриття існуючих складів аварійного постачання за умов їх обмежених потужностей...	109
2.5.1. Математична модель задачі оптимального зонування території для заданих центрів з інтегральними обмеженнями на них	109
2.5.2. Розв'язність задачі мультиплексного розбиття множини з інтегральними обмеженнями.....	110
2.5.3. Метод розв'язання задачі на основі теорії двоїстості. Зведення до задачі скінченновимірної оптимізації з недиференційованим критерієм	111
2.5.4. Алгоритм розв'язання задачі з використанням штрафних функцій.....	115
2.5.5. Приклади оптимального зонування областей за умови обмежених потужностей центрів	118
2.6. Оптимальне розміщення складів аварійного постачання з одночасною сегментацією регіону на зони їх впливу за умов наявності обмежень на потужності об'єктів.....	120
2.6.1. Математична модель – неперервна лінійна задача оптимального мультиплексного розбиття множини з розміщенням центрів і обмеженнями на їх потужності	120
2.6.2. Особливості методу розв'язання задачі	121
2.6.3. Наближений алгоритм розв'язання задачі оптимального зонування території при обмеженнях і результати обчислювальних експериментів.....	125
2.7. Розвиток існуючої системи екстреної логістики за рахунок оптимального розташування нових центрів аварійного постачання і перерозподілу навантаження на всі об'єкти	130

2.7.1. Математична модель задачі оптимального розміщення додаткових центрів і перерозподілу зон обслуговування	130
2.7.2. Метод розв'язання задачі і особливості його алгоритмічної реалізації	131
2.7.3. Результати розв'язання модельних задач	133
2.8. Висновки за розділом II.....	138
РОЗДІЛ III МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЗОНУВАННЯ ТЕРИТОРІЙ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ РОЗМІЩЕННЯ РЯТУВАЛЬНИХ ОБ'ЄКТІВ В СИСТЕМАХ ЕКСТРЕНОЇ ЛОГІСТИКИ	141
3.1. Моделювання і оптимізація зон в системах спостереження і екстреної допомоги на випадок надзвичайної ситуації	141
3.1.1. Математичне моделювання оптимального багатократного покриття обмеженої множини. Властивості. Метрики.....	143
3.1.2. Методи багатократного кульового покриття обмеженої множини.....	148
3.1.3. Конструктивні алгоритми розв'язання задач про оптимальне багатократне кульове покриття обмеженої множини.....	151
3.1.4. Результати розв'язання тестових задач. Порівняльна характеристика розроблених алгоритмів та відомих підходів ..	157
3.1.5. Використання алгоритмів розв'язання задач мультиплексного розбиття множин для обчислення радіусу багатократного кульового покриття	163
3.2. Оптимальне розміщення рятувальних об'єктів з урахуванням можливості якнайшвидшого надання допомоги мешканцям підлеглих територій	167
3.2.1. Постановка задачі та її математична формалізація.....	167
3.2.2. Дискретно-неперервний аналог задачі і її узагальнення ..	169
3.2.3. Опис алгоритму розв'язання задачі оптимального вибору місць розміщення рятувальних об'єктів з одночасним зонуванням території.....	172

3.2.4. Результати розв'язання модельних задач оптимального вибору місць розміщення центрів гуманітарної допомоги з одночасним розбиттям території на зони відповідальності центрів	175
3.3. Врахування регіональних особливостей під час оптимального розміщення рятувальних об'єктів і зонування територій.....	180
3.3.1. Неперервна задача оптимального покриття обмеженої множини при додаткових обмеженнях на розташування центрів	180
3.3.2. Опис можливих підходів до розв'язання задач: використання апарату штрафних функцій, функцій Лагранжа.....	181
3.3.3. Оптимальне кульове покриття областей складної форми. Застосування апарату R-функцій для опису границі регіону	187
3.3.4. Результати обчислювальних експериментів	191
3.4. Висновки за розділом III	193
РОЗДІЛ IV ДВОЕТАПНІ ЗАДАЧІ РОЗМІЩЕННЯ-РОЗПОДІЛЕННЯ СТРУКТУРНИХ ПІДРОЗДІЛІВ СИСТЕМИ ЕКСТРЕНОЇ ЛОГІСТИКИ	
4.1. Обґрунтування доцільності розробки математичних моделей і методів розв'язування багатоетапних задач розміщення органів евакуації і зонування постраждалих територій	196
4.2. Побудова математичних моделей двоетапних задач оптимального зонування території потенційного лиха з розміщенням органів з евакуації	197
4.2.1. Загальна постановка і математична модель двоетапних задач оптимального зонування території потенційного лиха з розміщенням проміжних (приймальних) пунктів первинної допомоги	197
4.2.2. Універсальність запропонованої математичної моделі двоетапного розподілу матеріальних потоків на випадок надзвичайної події	200

4.3 Опис методу розв'язання двоетапних задач з фіксованими центрами першого етапу.....	203
4.3.1. Задача з відомими потужностями центрів першого етапу та її розв'язність.....	203
4.3.2. Задачі двоетапного оптимального розподілу евакуйованих потоків без обмежень	205
4.3.3 Наближений алгоритм розв'язання двоетапної задачі розміщення – розподілення із заданими центрами	217
4.4. Двоетапна задача екстреної логістики з оптимальним розміщенням центрів первинного збору і алгоритм її розв'язання	219
4.5 Експериментальне дослідження властивостей оптимізаційних задач двоетапної екстреної логістики та алгоритмів їх розв'язування	226
4.6. Оптимізація частково-двоетапних процесів розподілу матеріальних або людських ресурсів.....	234
4.7. Висновки за розділом IV	238

РОЗДІЛ V РОЗРОБКА І ЗАСТОСУВАННЯ ПРОГРАМНОГО ДОДАТКУ ДЛЯ ЗАВЧАСНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ СИСТЕМИ ЕКСТРЕНОЇ ЛОГІСТИКИ НА ВИПАДОК НАДЗВИЧАЙНОЇ СИТУАЦІЇ В РЕГІОНІ.....

5.1. Опис процесу розробки програмного додатку для територіальної сегментації в системі екстреної логістики	241
5.1.1. Фактори, що враховуються під час зонування території у разі надзвичайної ситуації.....	241
5.1.2 Загальна структура розробленого багатофункціонального програмного додатку оптимального розташування підрозділів системи екстреної логістики.....	244
5.2. Приклади зонування територій та оптимального розміщення складів аварійного постачання й розподілу предметів першої необхідності ..	249
5.3. Зонування регіону для рятувальних служб, об'єктів спостереження (оповіщення населення) за територією з багатократним її покриттям	252

5.4 Інтерактивна карта зонування території для систем екстреної логістики	254
5.5. Висновки за розділом V	260
РОЗДІЛ VI АНАЛІЗ І ОПТИМІЗАЦІЯ ВИБОРУ СУКУПНОСТІ ЗАХОДІВ ЩОДО ПІДВИЩЕННЯ БЕЗПЕКИ ЛОГІСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ	262
6.1. Оцінювання ризику виникнення інцидентів під час транспортного процесу з використанням методу FRAM.....	262
6.1.1. Розробка методики оцінювання факторів, що впливають на безпеку транспортного процесу пасажирських перевезень	262
6.1.2. Моделювання взаємозв'язків між основними етапами процесу пасажирських перевезень на основі методу FRAM	265
6.1.3. Про деякі запобіжні та контрольні заходи щодо підвищення безпеки на об'єктах систем екстреної логістики.....	278
6.2. Оптимізація витрат на запобіжні заходи щодо зниження професійного ризику небезпеки до прийнятного рівня	283
6.2.1. Про керування ризиками виникнення небезпек і вибір захисних заходів на об'єктах систем екстреної логістики	283
6.2.2. Аналіз результатів розв'язання модельних оптимізаційних задач вибору комплексу заходів щодо зниження професійних ризиків.....	290
6.3. Висновки за розділом VI	296
ВИСНОВКИ.....	298
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	302
ДОДАТОК А. МЕТОДИКИ РОЗРАХУНКІВ І РЕКОМЕНДАЦІЇ, ЯКІ РОЗРОБЛЕНІ В ДИСЕРТАЦІЇ	332
ДОДАТОК Б. ДОКУМЕНТИ ПРО ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ.....	346
ДОДАТОК В. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ	356

ДОДАТОК Г. ФРАГМЕНТИ ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ, СТВОРЕНОГО МОВОЮ C# У СЕРЕДОВИЩІ VISUAL STUDIO ДЛЯ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО МУЛЬТИПЛЕКСНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН	369

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

ОРМ – оптимальне розбиття множин

ОМРМ – оптимальне мультиплексне розбиття множин

ОРМДЗ – оптимальне розбиття множин з додатковими зв'язками

БКПМ – багатократне кульове покриття множини

м. в. – майже всюди

ГІС – географічна інформаційна система

ДСНС – Державна служба України з надзвичайних ситуацій

БЖД – безпека життєдіяльності

ЗІЗ – засоби індивідуального захисту

ЗС – захисні споруди

НП – надзвичайна подія

НС – надзвичайна ситуація

ОПН – об'єкт підвищеної небезпеки

СЗЗ – санітарно-захисна зона

ЦЗ – цивільний захист

ВСТУП

Актуальність теми. Ефективне функціонування підприємств гірничо-металургійного комплексу є одним із основних чинників сталого розвитку економіки України, адже їх продукція використовується в усіх стратегічних галузях країни. Удосконалення технологій переробки корисних копалин сприяє досягненню позитивного ефекту в машинобудуванні, будівництві, розбудові транспортної інфраструктури, створенню нових робочих місць, формуванню передумов для стійкого економічного зростання країни. Однак, підприємства гірничо-металургійного комплексу становлять основну частину потенційно небезпечних об'єктів у регіонах. Велика кількість відходів та побічних продуктів виробництва, які не утилізуються, а складуються у відвалах та хвостосховищах, матеріали й речовини, що використовуються в технологічних процесах, технічна оснащеність устаткування – все це обумовлює виникнення передумов до аварійних ситуацій, які можуть призвести до негативних економічних і соціальних наслідків.

За результатами моніторингу надзвичайних ситуацій (НС), наведених у Національних доповідях та Аналітичних оглядах про стан технологічної та природної безпеки в Україні [1], більше половини з них є техногенними, решта носить природний і соціальний характер. Якщо у 2016-2017 спостерігалась тенденція до зменшення загальної кількості НС за рік, то вже у 2019 році порівняно з 2018 роком загальна кількість НС збільшилася на 14,1 %. В 2021, у порівнянні з 2020 роком, кількість НС збільшилось на 6,9% [2]. При цьому зростання числа саме техногенних надзвичайних ситуацій склало 12,8 % (унаслідок пожеж, аварій на системах життєзабезпечення, вибухів, руйнування споруд та будівель), а число НС природного характеру – на 1,6 % (через зростання в 4 рази кількості метеорологічних НС). Зменшення кількості загиблих внаслідок НС у 2016 – 2018 роках дає підставу зробити висновок про певну ефективність проведених заходів щодо запобігання і усунення наслідків НС.

Підвищення рівня техногенної безпеки на підприємствах гірничо-металургійної галузі потребує розвитку фундаментальної та прикладної науки, техніки і технологій, формування наукових основ забезпечення захищеності критичної інфраструктури; впровадження і розвинення систем екстреної логістики, оптимізації розміщення їх підрозділів; розробки комплексу організаційних та технічних рішень щодо своєчасних превентивних дій, спрямованих на уникнення надзвичайних ситуацій.

Існує значна кількість робіт вчених і практиків, у яких вивчаються різні аспекти математичного моделювання і методів розв'язання оптимізаційних задач, що виникають у процесі розробки запобіжних заходів, організації евакуаційних процесів або надання первинної гуманітарної допомоги населенню у разі надзвичайних ситуацій. Серед найбільш відомих слід виділити роботи таких авторів, як: В.А. Андронов, Г.Г. Півняк, В.Д. Калугін, М.М. Дівізінюк, А.Ф. Булат, Л.Ф. Чорногор, Р.І. Шевченко (моніторинг надзвичайних ситуацій); М.З. Згуровський, Н.Д. Панкратова, А.Б. Качинський, S. Kul, H. Erdal, H. Meng, J. Xing (формування методології та концепцій системного аналізу, прогнозування ризиків в задачах керування безпекою складних технічних систем); X. Zhao, C. Boonmee, M. Arimura, T. Asada (задачі розміщення-розподілу); R.L. Francis, M. Mostajabdaveh, W.J. Gutjahr, F.S. Salman (розміщення аварійних служб); В.М. Комяк, К.Т. Кязімов, V. Bayram, H. Yaman, M. Farahani (моделювання евакуаційних процесів); H. Baharmand, T. Comes, M. Lauras, P. Praneetpholkrang, V. Huynh, S. Kanjanawattana (моделювання багатокритеріальних задач розміщення-розподілу); L. Jin, M. Xiang, S. Chen, X. Zheng, I.M. Hezam, Mk. Nayeem, L. Özdamar, I. A. Чуб, М. В. Новожилова, Р.В. Гудак, Ю.М. Михайловська (розробка математичного забезпечення задач гуманітарної логістики); С. О. Смеляненко, А. В. Орещенко; Rahman M., Chen N. (використання ГІС для моделювання евакуаційних процесів) та ін. Проблемами розробки моделей та методів розв'язання задач розміщення-розподілу займалися L. Cooper, Z. Drezner, В.А. Трубін, H.W. Corley та S.D. Roberts, В.Р. Хачатуров та ін.

Суттєвий внесок у розвиток інформаційних технологій, системного аналізу, математичного моделювання оптимізаційних задач розміщення-розподілу внесла наукова школа члена-кореспондента Національної академії наук України, доктора фізико-математичних наук, професора О.М. Кісельової. В теорії неперервних задач оптимального розбиття множин, заснованій О.М. Кісельовою, отримано низку фундаментальних результатів, які нині складають широкий розділ нескінченновимірною математичного програмування. Дана робота, базуючись на теоретичних засадах цієї наукової школи, доповнює її новими напрямками науково-практичних досліджень, висвітлює прикладну значущість математичного і алгоритмічного забезпечення, розробленого плеядою науковців під керівництвом О.М. Кісельової.

Математичні моделі та методи розв'язання оптимізаційних задач, що виникають в системах екстреної логістики, дозволяють політикам та відповідальним особам оцінювати час, необхідний для евакуації, кількість можливих жертв та їхній розподіл за різних сценаріїв розвитку НС. Як зазначено в [4], зменшити кількість та масштаб катастроф можна за рахунок профілактичних заходів, раннього попередження. Мінімізація сумарних втрат у випадку виникнення певної надзвичайної ситуації, у свою чергу, потребує визначення раціональної кількості територіально розподілених структур в системі цивільного захисту, забезпечення їх підготовленими кадрами, спеціальною технікою та обладнанням, запасами медикаментів, засобами забезпечення життєдіяльності тощо. Отже, розробка ефективних математичних моделей процесів розподілу матеріальних ресурсів в транспортно-логістичних системах в умовах техногенних надзвичайних ситуацій, вдосконалення на їх основі методів та засобів математичного та комп'ютерного моделювання раціонального територіального розміщення елементів систем екстреної логістики є актуальною науково-прикладною проблемою, яка має важливе значення для підвищення техногенної безпеки підприємств гірничо-металургійного комплексу та критичної інфраструктури, для забезпечення сталого розвитку промислових регіонів України.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційна робота виконана згідно з пріоритетними напрямами відповідно до Закону України «Про пріоритетні напрями розвитку науки і техніки» – «Інформаційні та комунікаційні технології» і «Фундаментальні наукові дослідження із найбільш важливих проблем», в межах яких першочерговими тематичними напрямами наукових досліджень і науково-технічних розробок на найближчий період зазначено удосконалення і обґрунтування: методів та засобів запобігання виникненню надзвичайних ситуацій, реагування на них та ліквідації їх наслідків; методів та засобів інформаційно-аналітичного та нормативно-методичного забезпечення процесів прийняття рішень; розвиток математичного моделювання актуальних проблем природничих та соціально-гуманітарних наук.

Дисертаційна робота безпосередньо пов'язана з планами наукових досліджень, які виконувалися за держбюджетними тематиками кафедри системного аналізу та управління Національного технічного університету «Дніпровська політехніка»:

- НДР «Дослідження та підвищення ефективності прийняття рішень диспетчером вугільної шахти» (2017-2018 рр., № держреєстрації 0119U000343, відповідальний виконавець). Автором розроблено математичне забезпечення задач, пов'язаних з раціональною організацією процесів розподілу ресурсів в системі, структурними елементами якої є видобувний комплекс, збагачувальні фабрики і підприємства;

- «Задачі моделювання, оптимізації та прийняття рішень в складних системах різної природи» (2021-2022 рр., № держреєстрації 0223U000205, відповідальний виконавець). Автором розроблено і програмно реалізовано математичні моделі задач оптимального розміщення структурних елементів систем гуманітарної логістики і визначення зон їх відповідальності за критерієм мінімальних транспортних і організаційних витрат;

- НДР «Задачі аналізу, моделювання та оптимізації технологічних процесів у складних системах різної природи» (2023-2025 рр., №

держреєстрації 0123U100011, відповідальний виконавець). Автором запропоновано математичні моделі і методи розв'язання оптимізаційних задач зонування і розміщення об'єктів у потокових системах, що функціонують під час ліквідації наслідків надзвичайних ситуацій.

Мета і завдання дослідження. Підвищення ефективності планування завчасних соціально-економічних та організаційно-технічних заходів, оперативного реагування на надзвичайну техногенну ситуацію шляхом математичного і комп'ютерного моделювання раціонального територіального розподілу об'єктів систем екстреної логістики та оцінювання матеріальних потоків в них.

Для досягнення цієї мети необхідно вирішити такі основні задачі:

1) Проаналізувати моделі, методи та інформаційні технології, які використовуються для вирішення завдань, пов'язаних з територіальним розподілом елементів логістичних систем, завчасним плануванням запобіжних заходів в районах потенційних техногенних аварій або інших НС. Виокремити напрями дисертаційного дослідження.

2) Розробити математичні моделі оптимального зонування територій із розміщенням центрів логістики й розподілом транспортних потоків з оцінюванням місткості центрів і парку транспортних засобів на випадок НС.

3) Розробити моделі та методи оптимального зонування території області на зони відповідальності підрозділів систем екстреної логістики з можливістю надання сервісу у найкоротший термін та гарантованого обслуговування споживачів за рахунок прикріплення його до декількох найближчих підрозділів.

4) Розробити математичні моделі раціонального розподілу матеріальних потоків у транспортно-логістичних системах з дворівневою структурою.

5) Узагальнити математичні моделі і методи розв'язування неперервних задач оптимального розбиття множин з додатковими зв'язками, враховуючи можливість доставки частини ресурсу безпосередньо до кінцевого пункту.

6) Розробити обчислювальні методи для реалізації побудованих математичних моделей територіального розподілу об'єктів систем екстреної логістики. Провести обчислювальні експерименти з комп'ютерного моделювання

зон відповідальності підрозділів систем екстреної логістики з метою перевірки адекватності побудованих моделей, правильності роботи алгоритмів.

7) На основі розроблених моделей і методів розробити і впровадити математичне і програмне забезпечення територіальної сегментації для визначення зон відповідальності підрозділів систем екстреної логістики в регіоні, залучаючи ІС-технології для отримання вихідних даних про реальні транспортні шляхи та відстані між об'єктами.

8) Побудувати феноменологічну модель транспортного процесу, використовуючи метод аналізу функціонального резонансу FRAM, розробити методику оцінювання ризику виникнення небезпек і рекомендації щодо його зниження.

9) Розробити математичні моделі оптимального вибору комплексу завчасних заходів щодо зниження професійного ризику виникнення небезпеки на виробничих підприємствах і раціонального розподілу ресурсів.

Об'єктом дослідження є процеси екстреної логістики в умовах надзвичайних ситуацій техногенного характеру.

Предметом дослідження є моделі та методи оптимального розміщення структурних підрозділів систем екстреної логістики з визначенням зон їх обслуговування.

Методи дослідження. Для визначення вихідних даних, моделювання, розробки методів і алгоритмів розв'язання задач оптимального розміщення-розподілу структурних підрозділів систем екстреної логістики застосовані методи системного аналізу, математичного моделювання, цілочисельного лінійного програмування, нескінченновимірною математичного програмування, методи недиференційованої оптимізації, методи розв'язання неперервних лінійних задач оптимального розбиття множин (OPM), метод аналізу функціонального резонансу FRAM; для програмної реалізації алгоритмів розроблених методів – теорія алгоритмів, принципи об'єктно-орієнтованого програмування, методи проектування та програмування, функціонального та комплексного тестування.

Наукова новизна одержаних результатів. Основними результатами, які визначають наукову новизну і виносяться на захист, є:

вперше:

1) розроблено математичні моделі територіального зонування, які є неперервними задачами оптимального мультиплексного розбиття множин (ОМРМ) і, на відміну від відомих моделей ОРМ, дозволяють описувати розподільчі процеси в логістичних системах за критеріями мінімізації відстані до декількох найближчих центрів із врахуванням їх можливостей; розроблено обчислювальні методи розміщення сервісних центрів з урахуванням перекриття зон їх обслуговування;

2) теоретично обґрунтовано використання математичних моделей і методів розв'язання задач оптимального розбиття континуальних множин з розміщенням центрів та додатковими зв'язками (ОРМДЗ) під час дослідження двоетапних задач екстреної і гуманітарної логістики, що дозволяє використовувати їх в інформаційних технологіях систем екстреної логістики і складати пропозиції щодо організації багаторівневих процесів розподілу матеріальних потоків в логістичних системах, узгоджуючи локальні інтереси і цілі функціонування окремих їх елементів з головною метою – досягнення оптимальних загальних транспортних, часових і супутніх витрат;

3) розроблено математичні моделі задач частково-двоетапного розподілу матеріальних ресурсів в багаторівневих логістичних системах, які, на відміну від вищезгаданих задач ОРМДЗ, враховують напрям руху потоку і можливість доставки частини ресурсу безпосередньо до кінцевих пунктів, що дозволяє описувати та розв'язувати широке коло логістичних задач, створювати на їх основі нові інформаційні технології задля раціонального управління матеріальними потоками в багаторівневих структурах;

4) розроблено теоретичні та методологічні основи комп'ютерного моделювання оптимального розміщення об'єктів та зонування територій в системах екстреної логістики, які на відміну від існуючих, побудовані на основі інтеграції обчислювальних методів мультиплексного розбиття множин і

двоетапного розміщення-розподілу з сучасними ГІС-технологіями, що дозволяє планувати завчасні соціально-економічні та організаційно-технічні заходи, спрямовані на підвищення техногенної безпеки, швидко отримувати наближення зон обслуговування сервісних центрів, виключаючи необхідність залучення аналітиків для проведення детальної експертизи цих зон;

5) створено модель транспортного процесу з використанням методу FRAM і запропоновано методику оцінювання функціональних її елементів, що дозволяє досліджувати сукупний вплив різних факторів техногенного, природного та соціального походження на транспортний процес, надавати аргументовані рекомендації щодо запобігання небажаних подій. Зокрема, показано, що впровадження додаткового дистанційного контролю над певними діями або учасниками процесу знижує ризик виникнення інциденту на 15-20%.

набули подальшого розвитку:

6) теорія неперервних задач оптимального розбиття множин за рахунок введення нового класу задач, в яких побудовано мультиплексне розбиття, що дозволяє розширити можливості моделей, підвищити повноту відображення в них спільного обслуговування мережею сервісних центрів споживачів, неперервно розподілених на певній території, перерозподіляти зони обслуговування функціонуючих центрів;

7) теорія багатоетапних задач транспортного типу за рахунок розробки моделей, які враховують напрям руху матеріальних потоків, обмежені потужності логістичних центрів, витрати на їх організацію, що дозволяє комплексно розв'язувати задачі розміщення об'єктів систем екстреної логістики і розподілу ресурсів в процесі їх транспортування від місць вихідного потоку до кінцевих споживачів, посилювати синергетичний ефект прийняття управлінських рішень в соціально-технічних системах;

8) методологічні основи створення та використання засобів комп'ютерного моделювання за рахунок інтеграції сучасних ГІС та математичного забезпечення неперервних задач оптимального мультиплексного розбиття множин і задач розміщення-розподілу, що дозволяє вирішити на цій

основі важливу науково-прикладну проблему прийняття аргументованих рішень щодо розташування об'єктів систем екстреної логістики і визначення матеріальних потоків у випадку техногенних надзвичайних ситуацій;

удосконалено:

9) моделі неперервних задач оптимального багатократного кульового покриття множин, котрі, на відміну від раніше відомих, враховують особливості множини, на якій розміщуються центри, що дозволяє підвищити оперативність і обґрунтованість прийняття рішень про вибір місць розташування підрозділів систем екстреної логістики на базі існуючих об'єктів, уникаючи розташування центрів занадто близько один від одного;

10) систему управління ризиками небезпек на підприємствах за рахунок розроблення математичних моделей оптимального вибору сукупності запобіжних/захисних заходів щодо зниження рівня професійного ризику до прийнятних норм за критеріями мінімізації витрат або максимізації ефективності вкладення коштів, що дозволяє раціонально використовувати фінансові ресурси, адже показано, що ефективність витрат може зрости на 17% – 46%, а самі витрати при цьому зменшитися на 9% – 18% у порівнянні з ефективністю і кошторисом мінімальної кількості заходів щодо зменшення професійного ризику до допустимого рівня.

Обґрунтованість і достовірність наукових положень, висновків і рекомендацій забезпечується коректністю та строгістю математичних викладок; використанням апробованих математичних моделей неперервних задач оптимального розбиття множин та методів обчислювальної математики; доведенням тверджень; контрольованою точністю обчислювальних методів, узгодженістю між собою аналітичних та чисельних результатів, які були отримані у процесі досліджень; впровадженням розроблених методик та рекомендацій.

Практичне значення одержаних результатів. Практична значущість дисертаційного дослідження полягає в створенні багатофункціонального програмного додатку, який реалізує методи розв'язання задач оптимального зонування територій із закріпленням зон за певними центрами або об'єктами

інфраструктури для надання логістичних послуг, методи розв'язання задач оптимального розподілення матеріальних потоків у багаторівневих транспортно-логістичних системах. Розроблений програмний додаток дозволяє раціонально за територіальним та часовим критеріями розподілити матеріальні ресурси між наявними або новими оптимально розміщеними центрами з урахуванням їх можливостей.

На основі результатів, які отримано в процесі дисертаційного дослідження, розроблено наступні методики та рекомендації:

- «Методика оптимального розподілу матеріальних потоків між структурними елементами багатоетапного виробництва», використання якої сприяє підвищенню економічної ефективності функціонування усіх підприємств багаторівневого виробництва, надаючи можливість зменшувати сукупні витрати, пов'язані з управлінням рухом продукції протягом всього логістичного ланцюга від розробки родовищ, доставки сировини на переробку до поставки товарної продукції кінцевим споживачам;

- «Методика оптимального розміщення підрозділів системи екстреної логістики на випадок надзвичайної ситуації», впровадження якої орієнтовано на підвищення ефективності функціонування багаторівневих систем екстреної логістики на етапах взаємодії їх структурних підрозділів при розподіленні матеріальних та людських потоків;

- «Методика раціонального вибору місць розміщення рятувальних служб на випадок техногенних аварій», яка надає можливість приймати обґрунтовані та виважені управлінські рішення щодо розміщення нових структурних підрозділів системи екстреної логістики на територіях, які займають гірничі підприємства з урахуванням можливих матеріальних та часових витрат на надання екстреної допомоги;

- «Рекомендації щодо оптимального розташування нових підрозділів систем екстреної логістики та перерозподіл їх навантаження», використання яких сприяє завчасному плануванню заходів щодо пом'якшення впливу небезпек у випадку надзвичайних ситуацій, удосконаленню існуючих системи екстреної допомоги за

рахунок оптимального розміщення нових об'єктів і перерозподілу навантаження на системи в цілому;

– «Рекомендації щодо розробки науково-освітньої платформи для розв'язання актуальних проблем у сфері логістики, у тому числі гуманітарної», дотримання яких під час розроблення науково-освітньої платформи сприятиме формуванню у потенційних користувачів цілісної системи знань в галузі логістики підприємств і організацій, навчанню прийомам розробки стратегій та їх реалізації на практиці, набуттю навичок аналізу роботи транспортно-виробничих систем, підвищенню кваліфікації керівників підприємств і компаній в галузі теорії та практики функціонування логістичних систем.

В цілому, розроблений програмний продукт для систем екстреної логістики дозволяє вирішувати ряд практичних проблем, пов'язаних із задачами стратегічного планування у виробничій, соціальній, економічній галузях діяльності, зокрема: при створенні територіально-розподілених багаторівневих компаній, які здійснюють повний цикл виробництва від видобутку сировини з її комплексним використанням, переробкою, випуском продукції і транспортуванням до кінцевих споживачів; для завчасного планування і управління логістичними процесами з метою запобігання та зниження негативного впливу наслідків техногенних надзвичайних ситуацій.

Реалізація результатів роботи. Результати дисертаційної роботи використовуються у Національному технічному університеті «Дніпровська політехніка» в навчальному процесі підготовки студентів і аспірантів за напрямом 124 Системний аналіз при викладанні наступних дисциплін: Методи оптимізації та дослідження операцій; Моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів; Оптимізаційні багатоетапні задачі розміщення-розподілу (акт про використання від 09.03.2023). Розроблені методики і рекомендації впроваджено в Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова з економічним ефектом в обсязі 163,4 тис. грн (акт про використання від 17.05.2023); Придніпровський науковий центр НАН України та МОН України (економічний ефект складає 215,5 тис. грн; акт про використання від 07.09.2022); ТОВ «Шахтостроймонтаж» з економічним

ефектом у 364,5 тис. грн (акт про використання від 10.02.2022); ТОВ «Донбассшахтпроект» (акт про використання від 26.05.2023).

Особистий внесок здобувача. Усі наукові результати дисертаційної роботи отримані автором особисто. Роботи [1, 30, 48, 49] виконувались без співавторів (Додаток В). У публікаціях, написаних у співавторстві, здобувачеві належить такі результати: [18, 23, 24, 41] – огляд сучасних наукових публікацій за темою досліджень; [6, 7, 26, 33, 35, 38, 47, 52] – розробка й теоретичне обґрунтування математичної складової створеного програмного додатку територіальної сегментації; [10, 18, 19, 28, 53] – проведення порівняльного аналізу результатів роботи реалізованих алгоритмів; [11, 12, 19, 21, 27, 42] – реалізація алгоритмів розв’язання двоетапних задач розміщення-розподілу у програмному додатку територіальної сегментації; [13, 14, 50] – узагальнення задач оптимального розбиття множин, математичні моделі задач ОМРМ; [2, 3, 36, 37, 43, 55] – розробка і обґрунтування методів розв’язання задач; [13, 29, 31, 52, 54] – побудова математичних моделей неперервних задач багатократного покриття з використанням характеристичних функцій; [34] – розробка і програмна реалізація алгоритмів побудови різних узагальнень діаграм Вороного; [8, 9] – розробка концепції досліджень і методики аналізу результатів; [16, 17, 20, 46] – обґрунтування вибору математичного апарату для опису систем і процесів, що досліджуються; [5, 22, 25] – розробка і реалізація математичного інструментарію досліджень; [27, 39, 40, 51] – проведення обчислень і аналіз результатів; [4] – розробка методу розв’язання динамічних задач оптимального розбиття множин; [15, 32] – розробка необхідних і достатніх умов оптимальності; [22, 44, 45] – теоретичне обґрунтування методів розв’язання задач оптимального вибору місць розміщення об’єктів з одночасним зонуванням території.

Апробація результатів дисертації. Основні наукові, теоретичні положення та практичні результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на (Додаток В):

– 16 міжнародних науково-технічних і науково-практичних конференціях: XVIII Міжнародна конференція з математичного моделювання, МКММ-2017 (Херсон, 2017); «Сучасні проблеми і досягнення в галузі радіотехніки,

телекомунікацій та інформаційних технологій» (Запоріжжя, 2018); «Математичне та імітаційне моделювання систем», МОДС (Чернігів, 2015, 2016); «Сучасні інформаційні та комунікаційні технології на транспорті, в промисловості та освіті», (Дніпропетровськ, 2015, 2016); «Проблеми інформатики та моделювання», ПІМ-2017 (Харків, 2017); «Комп'ютерне моделювання: аналіз, управління, оптимізація» (Дніпро, 2019); «Information control systems and technologies» (Odessa, Ukraine, 2018); E3S Web of Conferences, International Conference Essays of Mining Science and Practice, (Dnipro, Ukraine, 2019); «Потураївські читання» (Дніпро, 2023, 2024); «Сучасні тенденції та перспективи розвитку науки, освіти та суспільства» (Орхус, Данія, 2023); II Міжнародній науково-практичній конференції «Логістика і транспортна безпека: проблеми та перспективи розвитку в контексті аналізу сучасних викликів і загроз», (м. Дніпро, 2023); Міжнародній науково-практичній конференції «Сучасні виклики та актуальні проблеми науки, освіти, технологій та суспільства» (Біла Церква, Україна, 2023); International scientific-practical conference «Science, education and technology: global trends and the regional aspect» (Tampere, Finland, February 3, 2024);

– Міжнародному науковому симпозиумі «Інтелектуальні рішення». Теорія прийняття рішень (Ужгород, 2019);

– Міжнародному науковому школі-семінарі «Питання оптимізації обчислень (ПОО-XLII)», присвяченому 85-річчю від дня народження академіка В.С. Михалевича (Чинадієво, 2015);

– 5 Всеукраїнських науково-практичних конференціях: «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики», АРАМС – 2015 (Львів, 2015); «Інформатика, управління та штучний інтелект», ІУШ-2015, (Харків, 2015); «Транспортний комплекс України: Умови ефективного розвитку» (Одеса, 2019); VI-й Всеукраїнській науково-практичній інтернет-конференції здобувачів вищої освіти і молодих учених, 2023 р., м. Харків; Всеукраїнській інтернет-конференції «Економічна кібернетика: інструменти і методи дослідження та організації економічних процесів» (м. Дніпро, 1–2 березня, 2024);

– наукових семінарах кафедри системного аналізу та управління Національного технічного університету «Дніпровська політехніка» МОН України та кафедри інформаційних технологій і систем Українського державного університету науки і технологій МОН України.

Публікації. За темою дисертації опубліковано 55 наукових робіт, у тому числі 14 публікацій у закордонних періодичних виданнях та у виданнях, які входять до міжнародних наукометричних баз: 12 – у *Scopus* та *Web of Science*, 2 – *Index Copernicus*; 14 наукових статей у фахових виданнях України, 24 матеріали конференцій і тез доповідей, 1 монографія, 1 Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел із 224 найменувань на 30 сторінках та 6 додатків на 50 сторінках. Загальний обсяг дисертації становить 381 сторінка, з них 302 сторінок основного тексту (без анотацій 287 сторінок), 82 рисунки, 28 таблиць.

РОЗДІЛ І

ОГЛЯД ПРОБЛЕМИ ТА НАУКОВИХ ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДОСЛІДЖЕНЬ

1.1. Екстрена логістика як напрям гуманітарної (соціальної) логістики. Концепція, завдання, принципи. Системи екстреної логістики

Значущим напрямком наукових досліджень в галузі безпеки життєдіяльності є гуманітарна логістика. Вона вивчає проблеми, які виникають під час техногенних або природних надзвичайних подій, розробляє заходи та операції щодо усунення цих проблем, пом'якшення наслідків і управління ситуаціями.

Характерною особливістю гуманітарної логістики є її орієнтація на людину не тільки як на суб'єкта логістичних процесів (кінцевого споживача товарів та послуг або агента, котрий приймає участь у проміжних логістичних процесах), але й як на об'єкта. Це накладає додаткові вимоги до рівня безпеки, комфорту і швидкості логістичних операцій.

У гуманітарній логістиці виокремимо систему досліджень та знань, які пов'язані із раціональною організацією процесів евакуації, плануванням руху людських і матеріальних потоків під час НС. Цей напрям наукових досліджень назовемо **екстреною логістикою**, позаяк більшості дій і заходів щодо запобігання або ліквідації наслідків від стихійних лих або техногенних аварій носять екстрений характер.

У практичному розумінні екстрена логістика є комплексним процесом, спрямованим на зменшення кількості та масштабів катастроф за рахунок профілактичних заходів, зниження загальних транспортних і організаційних витрат, мінімізації сумарних втрат, пом'якшення наслідків від НС. Важливість екстреної логістики зростає зі збільшенням кількості стихійних лих, локальних воєнних конфліктів, які супроводжуються вибухами, пожежами, повеннями, іншими негативними наслідками, що завдають значної матеріальної

та соціальної шкоди суспільству. ЕЛ відіграє важливу роль, коли зростає ризик виникнення аварійних ситуацій внаслідок зношуваності об'єктів інфраструктури чи недосконалого рівня їхнього фізичного захисту.

Суттєве значення екстреної логістики у наданні допомоги в умовах надзвичайних ситуацій техногенного чи природного характеру обумовлене кількома причинами. По-перше, вона значно зменшує негативний вплив НС на людей та економіку, такий як: втрати будівель, автомагістралей, інших об'єктів інфраструктури; зниження обсягів виробництва та скорочення зайнятості; збитки через зростання цін на матеріали; втрата життів через брак їжі або нещасні випадки. По-друге, логістичні дані відображають усі аспекти руху ресурсів від ефективності постачальників транспортних послуг та їхніх агентів до вартості наданих послуг, своєчасності реагування, доречності та управління інформацією. Відтак, ЕЛ надає можливість здійснювати подальший аналіз подій і навчання після них, що є критично важливим як для поточних, так і для майбутніх рятувальних операцій та програм.

Концепція екстреної логістики ґрунтується на системному підході до вирішення логістичних завдань в умовах надзвичайних ситуацій, виробляючи аргументовані рішення на основі економічних або часових компромісів, відстежуючи матеріальні та часові витрати протягом усього логістичного ланцюга. Об'єкти та явища, пов'язані із надзвичайною подією, досліджуються як цілісні логістичні системи на макро- і мікро- рівнях. На макрорівні встановлюються границі логістичної системи як єдиного цілого, та її зовнішні зв'язки, ззовні оцінюються й аналізуються властивості системи. На мікрорівні вивчаються складові елементи системи, їх властивості та взаємозв'язки.

Аналізуючи у комплексі можливі ризики, природу внутрішніх і зовнішніх факторів та їх взаємний вплив на логістичну систему, можна виявити нові властивості, що притаманні системі в цілому, а не окремим її складовим, розробити сукупність дій і заходів для досягнення загальної цілі системи. Особливу увагу варто приділяти початковим умовам, можливостям і обмеженням, оскільки перевезення населення із зони НС, збір та доставка

гуманітарної допомоги, інші заходи обумовлені доступністю та місткістю транспортних засобів, часовими витратами на транспортування ресурсів, особливостями інфраструктури зони надзвичайної ситуації та інш.

Система екстреної логістики (СЕЛ) поєднує у собі комплекс об'єктів, методів, форм та правил щодо організації та управління потоками матеріальних або людських ресурсів під час надзвичайних подій. В СЕЛ існує три рівня підсистем – елементарний, функціональний та інтеграційний. Підсистеми елементарного рівня відповідають за узгоджене та ефективне функціонування базових складових логістичного процесу (склади, первинні пункти збору постраждалого населення, аварійні служби, транспорт). Підсистеми функціонального рівня слугують для організації матеріальних і людських потоків, управління запасами, забезпечення юридичного та інформаційного. Інтеграційний рівень передбачає об'єднання усіх груп дій та заходів у єдиний процес.

Раціональність та ефективність рішень у відношенні до систем екстреної логістики обумовлюються повнотою та своєчасністю виявлених обмежень, а також економічними компромісами. Всі вказані аспекти науково-практичного напрямку екстреної логістики відображені на схемі на рис.1.1.

Екстрена логістика виконує три функції: інтегруючу, організуючу та керуючу. Перша передбачає формування процесу руху ресурсу або людських потоків як єдиної цілісної системи. Друга забезпечує взаємодію учасників та узгодження операцій з руху матеріальних ресурсів або населення. Третя проявляється у підтримці параметрів системи логістики в певних границях. Отже, ЕЛ здійснює оптимальне управління матеріальними та людськими потоками в умовах НС.

Далі наведено основні завдання екстреної логістики.

1. Швидкість реагування. Позаяк під час надзвичайних ситуацій кожна хвилина є критичною, ЕЛ передбачає швидку реакцію на подію, оцінювання умов та наявності відповідних ресурсів.



Рис. 1.1. Екстрена логістика як напрям наукових досліджень

2. Координація дій. Ефективність екстреної логістики обумовлена добре організованою співпрацею різних організацій, структур влади, груп волонтерів та інших сторін.

3. Оцінювання потреб населення постраждалих регіонів – медична допомога, притулок, вода, продовольство та інше. Оцінку цих вимог, а також забезпечення відповідних ресурсів і включає в себе екстрена логістика.

4. Доставка та розподіл ресурсів. Ключовими завданнями ЕЛ є швидке та безпечне транспортування гуманітарної допомоги до місця призначення та евакуація населення з території НС, що, у свою чергу, передбачає використання різних типів транспортних засобів.

5. Збір даних та управління інформацією. В умовах надзвичайних ситуаціях важливою є актуальність та достовірність інформації про характер, розмір та місцезнаходження надзвичайної події. Координацію зусиль та прийняття обґрунтованих рішень здійснюють сьогодні, залучаючи сучасні геоінформаційні системи.

6. Захист життя здоров'я населення. Техногенні надзвичайні ситуації є вкрай небезпечними для населення і рятувальних команд. ЕЛ виробляє систему заходів для забезпечення безпеки людей.

7. Відновлення нормального функціонування суспільства. Екстрена логістика обов'язково включає розробку операцій щодо приведення інфраструктури та умов життєдіяльності після надзвичайної ситуації до належного рівня.

Невизначеність факторів НС та численність гравців, залучених до запобігання або усунення наслідків надзвичайної події, обумовлює важливість і складність планування дій і заходів з екстреної допомоги та евакуаційних процесів. Для обґрунтування управлінських рішень, що враховують багато факторів, а інколи й вкрай суперечливі критерії, широко використовується математичне моделювання.

Математичні постановки та методи розв'язання оптимізаційних задач розподілу матеріальних потоків, зокрема в системах екстреної логістики, дозволяють особам, які приймають рішення, реагувати на надзвичайну подію, визначати терміни, в які потрібно провести евакуацію населення, оцінювати число можливих жертв та їх розподіл по притулках за різних надзвичайних умов. Для того, аби аргументувати вибір певного комплексу заходів, потрібно оцінити усі загрози, швидкість дій, необхідних для реагування на надзвичайну ситуацію, географічне розташування, специфіку забудови в зоні НС. Усі дії з евакуації населення можуть мати запобіжний або екстрений характер. У випадку, коли надзвичайні обставини лише прогнозуються, евакуація має проводитись із запобіганням.

Далі представлений огляд сучасних наукових публікацій з математичного опису і розробки методів розв'язання задач оптимізації евакуаційних процесів та раціонального вибору сукупності запобіжних заходів або надання екстреної допомоги у разі загрози НС.

1.2. Сучасні оптимізаційні моделі і методи в системах екстреної логістики

В науковій літературі для задач оптимального територіального розподілу об'єктів систем цивільного захисту запропонована чимала кількість математичних моделей. Огляд досліджень евакуаційних процесів на основі моделей і методів математичного програмування наведений в [5, 6]. Серед них є задачі розміщення-розподілення для розробки планів евакуації у разі землетрусів чи ураганів [7, 8], пошук найвигідніших маршрутів евакуації та місць укриття, коли надзвичайні ситуації відбуваються в межах міста [9], через умисні дії чи природні катаклізми в замкнутих границях (на стадіонах, в торговельних центрах, конференц-залах, музеях) [10, 11].

Існує велика кількість робіт з гуманітарної логістики (ГЛ), які вивчають проблеми, пов'язані з можливими техногенними або стихійними надзвичайними ситуаціями, розробкою операцій щодо їх усунення. В роботі [12] описані задачі і технології, які використовуються в ГЛ. Детальний огляд наукових публікацій з гуманітарної логістики за період з 2000 по 2020 роки представлений в [13]. Автори систематизують публікації за різними сторонами проблем ГЛ, які вивчаються: на етапах до НС та після неї, з урахуванням можливих людських та економічних втрат. Розглянуто декілька математичних моделей і алгоритмів для підвищення ефективності логістичних операцій. Оптимізаційні задачі розбито на три групи відповідно до головної проблеми, яка вивчається: 1) розташування об'єктів та оптимальне покриття, 2) моделі та задачі транспортування і розподілу на мережі, 3) масова евакуація постраждалого населення, яка розглядається з точки зору урядової та приватної організації. У кожній групі представлені і детерміновані, і недетерміновані моделі.

У силу невизначеності багатьох аспектів евакуаційних процесів та надзвичайних умов більшість існуючих математичних їх описів мають стохастичний характер [14, 15]. Так, у роботі [16] запропоновано двоетапну стохастичну модель евакуаційного процесу, в якій ставиться за мету

оптимальне розташування місць укриття та призначення евакуйованих до найближчого з них задля якомога найменшого очікуваного загального часу, що витрачається на евакуацію. Математична модель оптимізації розташування притулку з обмеженими шансами за умов невизначеності попиту представлено в [17]. Користуючись центральною граничною теоремою, авторами побудовано еквівалентну нелінійну детерміновану модель, яка, у свою чергу, зведена до задачі частково цілочисельного лінійного програмування за допомогою апроксимації нелінійних членів кусково-лінійними функціями у цільовому критерії, для якого здійснюється пошук максимуму. Використовуючи дані з району Картал і з анатолійської сторони Стамбула (Туреччина), у роботі вирішена проблема розміщення місць укриття для постраждалого населення. Аналізуючи розв'язки різних оптимізаційних задач за різних комбінацій вихідних параметрів, автори роблять висновок про важливість урахування таких соціальних і економічних аспектів, як рівень обслуговування, коефіцієнт використання житла, попит.

Часто в регіонах, де високою є загроза надзвичайних ситуацій, організації, які приймають участь в діях з ліквідації або пом'якшення наслідків НС, заздалегідь передбачають наявність певних ресурсів. Під час НС іноді звертаються до іншої національної чи міжнародної допомоги. Аби врахувати невизначеність умов і складність опису НС, математичне моделювання задач гуманітарної логістики здійснюють з використанням елементів теорії нечітких множин і нечіткої логіки [18, 19]. Приміром, в [19] запропонована двокритеріальна модель оптимізаційної задачі ГЛ, в якій деякі параметри задані у вигляді трикутних нейтронофізичних чисел. Реалізовано модель, використовуючи оптимізаційний розв'язувач LINGO, на базі компромісного підходу із залученням методів головного критерію та зваженої суми.

Задачі оптимізації систем аварійного матеріально-технічного постачання з урахуванням превентивних заходів щодо захисту навколишнього середовища розглянуто в роботі [20]. Тут представлено нечітку багатокритеріальну модель логістики, яка передбачає мінімізацію часу

доставки, загальних витрати і викидів вуглецю. Запропоновано гібридний двоступеневий алгоритм розв'язання задачі у поєднанні з алгоритмом рою часток та пошуку табу.

1.3. Огляд публікацій з розв'язання задач раціонального територіального розподілу елементів систем цивільного захисту

Взагалі наукові дослідження, що стосуються плануванню операцій в разі стихійних лих або техногенних аварій, можна умовно розбити відповідно до стадії планування.

На етапі підготовки до надзвичайної ситуації основна увага приділяється укріпленню будівель та інфраструктури [21, 22, 23], завчасному розміщенню центрів швидкого розподілення допомоги та евакуаційних сховищ [24, 25]. Так, в [26] досліджено стохастичну задачу визначення набору місць для укриття на стадії готовності до стихійних лих, для розв'язання якої у разі великої розмірності запропоновано генетичний алгоритм.

Більшість існуючих моделей екстреної логістики зазвичай передбачає процес евакуації на основі фіксованих і заздалегідь визначених пунктів призначення зі стратегічною перспективою. Мінливий і турбулентний характер катастрофи може, однак, порушити передбачення. Крім того, головна мета в надзвичайних ситуаціях – відправити людей із небезпечної зони в безпечне місце, незалежно куди. В [27] представлена математична модель, яка поєднує рішення щодо розташування сховищ з проблемою максимального потоку так, аби вибрати безпечні місця призначення і максимізувати кількість відправлених людей. У цій статті розроблено змішану цілочисельну модель лінійного програмування для вибору одного або кількох пунктів призначення в ємнісній мережі. Методи розв'язання базуються на існуючих алгоритмах для задачі максимального потоку з евристикою, що використовує ідею додавання так званого суперприймача в мережу для швидкої оцінки верхніх меж.

Проблема визначення місця призначення розглядається за п'ятьма ступенями тяжкості стихійного лиха.

На етапі після надзвичайної ситуації акцент зміщується на процес евакуації населення до захисних споруд або у безпечні зони, розподіл допомоги та транспортування поранених до сховищ [28, 29]. Запропоновані математичні моделі є або лінійними, або задачами змішаного цілочисельного лінійного програмування, або розглядаються як динамічні мережеві потоки [27, 30]. Оптимізаційні критерії включають загальний час, відстань евакуації, час очікування евакуйованих або вартість транспортного потоку [31]. В [32] розроблена модель евакуації, яка забезпечує реорганізацію маршрутизації трафіку у певній області у випадку виникнення загрози і зводить до мінімуму час евакуації, запобігаючи конфліктам на перехрестях. Для реалізації цієї задачі динамічного потоку на мережі з додатковими цілочисельними змінними у кількості напрямків використовуваних ліній руху та з відповідними складними обмеженнями автори пропонують застосовувати евристичний підхід.

Аби забезпечити своєчасну евакуацію з зон лиха, рішення щодо розташування укриття та призначення маршруту (руху) слід розглядати одночасно. У контексті **управління надзвичайними ситуаціями** проблеми розташування укриття та визначення евакуаційних маршрутів досліджувалися багатьма фахівцями з оптимізації, як окремо, так і комплексно. Дворівневе програмування, в якому рішення щодо розташування укриття та призначення маршрутів надаються відповідно на верхньому та нижньому рівнях, є одним із найпоширеніших підходів щодо вирішення цих двох проблем окремо на ранній стадії. Запропонована в [33] дворівнева багатокритеріальна оптимізаційна модель орієнтована на дві категорії осіб, які приймають рішення, – містобудівників та евакуйованих. Вона передбачає можливість визначати кращі місця для розміщення сховищ таким чином, аби розподіл трафіку в існуючій мережі був найкращим з точки зору його екстреної маршрутизації. Один з оптимізаційних критеріїв виражає в грошовому еквіваленті витрати на будівництво житла. Другий описує систему поїздок і

відображує загальну спроможність (охват) розміщених сховищ. Тобто, одночасно розглядається як фаза перед катастрофою, так і фаза після неї. В рамках прийняття рішень на верхньому рівні змодельовані цілі включають мінімізацію витрат на будівництво і максимізацію охопту цими спорудами житлових зон за рахунок мінімізації загального часу на всіх транспортних шляхах у процесі евакуації. На нижньому рівні – мінімізація індивідуального часу евакуації транспортною мережею за умов рівноваги в системі в цілому, коли евакуйовані більше не можуть зменшити свої зусилля по переміщенню. Реалізація моделі здійснюється в два етапи. На першому задачу зводять до однорівневої з використанням умов Каруша – Куна – Таккера. На другому здійснюють лінеаризацію і подають задачу у вигляді моделі частково цілочисельного лінійного програмування, котра розв’язується за допомогою CPLEX. Автори стверджують, що запропоновану модель можна ефективно використовувати для прийняття рішень на етапах докризового планування евакуації, проте в дослідженні є ряд обмежень. По-перше, не врахований фоновий трафік в мережі. По-друге, не досліджено примушення евакуйованих до вибору певних маршрутів за допомогою процедур заохочення та покарання. По-третє, характер лиха вважається загальним, хоча тип надзвичайної ситуації може впливати на поведінку евакуйованих. Особливостям функціонування системи ситуаційних центрів на різних стадіях розвитку НС присвячено роботу [34].

Серед наукових досліджень евакуаційних процесів, в яких одночасно з розташуванням сховищ планують території їх охопту, моделюють зони аварійної небезпеки й реалізації захисних заходів, можна виділити, наприклад, роботу [35]. В ній запропоновано модель стохастичного програмування з обмеженням шансів, яка враховує невизначеність попиту в місцях стихійного лиха, мінімізуючи загальний час евакуації. Останній відображає ефективність управління надзвичайними ситуаціями. Умовна оцінка ризику включена в цільову функцію для врахування ризикових заходів за наявності невизначеного попиту після катастрофи.

Задачу раціонального розбиття міста на райони функціонування захисних споруд, в якій враховуються щільність населення і рельєф місцевості, розглянуто в [4]. Для збалансування проблем складності і невизначеності в задачі розміщення розподільних центрів, обумовлених обмеженнями в часі та ресурсах, в [36] запропоновано модель розташування-розподілення, яка розділяє топографію уражених ділянок на кілька шарів, враховує обмежену кількість і потужність об'єктів, і дозволяє особам, які приймають рішення, досліджувати компроміси між часом відповіді та витратами на логістику. Побудовану модель застосовано до реального набору даних із реакції на землетрус у Непалі 2015 року.

Вплив прийняття рішень щодо розміщення притулку на успіх реагування на катастрофу та на безпеку постраждалих досліджено в [37]. Авторами запропонована оптимізаційна модель з трьома цільовими функціями для підвищення як ефективності, так і результативності. Перша передбачає мінімізацію загальних витрат, включаючи постійні витрати на відкриття притулків, транспортні витрати та витрати на обслуговування. Друга – мінімізацію загального часу на евакуацію населення з усіх постраждалих районів до виділених притулків. Третя – мінімізацію кількості притулків, необхідних для надання повноцінного обслуговування. Застосовність моделі підтверджена на прикладі повені в Сурат Тані, Таїланд.

1.4. Використання геоінформаційних систем і технологій для вирішення проблем обчислень, спричинених унікальними характеристиками евакуаційного трафіку

Широке використання геоінформаційних систем (ГІС) у різних областях практичної діяльності пояснюється можливістю об'єднання в них різномірних даних на основі географічної інформації. Сучасні ГІС надають засоби відображення та ідентифікації об'єктів в одному певному або багатьох місцях розташування, моделювання процесів і ресурсів, розпізнавання загроз. За

допомогою геоінформаційних технологій можна оцінити вплив на довкілля надзвичайних подій, водночас провести аналіз різних даних, розробити кроки та дії, котрі слід здійснити. ГІС доцільно використовувати як загальну платформу для поєднання робочих процесів різних структур, дії в масштабах уряду, позаяк вона здатна об'єднувати дані, водночас просторові і непросторові, аналізуючи та моделюючи процеси, що досліджуються.

Сучасний рівень розвитку інформаційних та телекомунікаційних систем дозволяє використовувати їх для запобігання і ліквідації надзвичайних ситуацій. Науковці намагаються застосовувати новітні комп'ютерні технології для моделювання виникнення і розповсюдження надзвичайних ситуацій техногенного, природного та соціального характеру.

Нині реалізовано різноманітні технологічні рішення щодо надання Інтернет-послуг стосовно цифрових геоданих: виробництво й поширення, стандартизація і класифікація. Створюються ГІС з можливостями віддаленого доступу для широкого кола користувачів і розробки комплексних науково-дослідних геоінформаційних проектів, спеціалізованих ГІС-технологій. Це розмаїття диктується бажанням врахувати, за можливістю, широкий спектр функціональних вимог і запитів користувача, що пред'являються до інтернетівських ГІС-додатків, приміром, миттєве формування запиту, його передача та виконання, доступ та обробка великих масивів географічних даних. Формуються WebGIS-системи, які дозволяють отримувати і обробляти геопросторову інформацію в он-лайн режимі. Головна їхня перевага полягає у поєднанні між собою даних, зосереджених у різних точках земної кулі, що робить їх доступними для широкого і спільного використання. WebGIS-технології дозволяють практично додати геоінформаційні функції широкому спектру додатків, що використовуються в управлінні, бізнесі та освіті.

Найбільш потужними серед сучасних ГІС є Autodesk Map, ArcGIS, MapInfo, IndorGIS та інші. Більшість з них характеризується модульною архітектурою, ядро якої забезпечує візуалізацію карти, інші функції аналізу

геопростору. Шляхом підключення додаткових модулів можна розширити їхній перелік.

Повнофункціональні системи ArcGIS та IndorGIS надають можливість будувати зони близькості у вигляді звичайних діаграм Вороного, знаходити найкоротший шлях, оптимальний порядок обходу графа доріг, розраховувати доступність транспортних зв'язків та інтенсивність потоків. IndorGIS вміє відтворювати навіть зони близькості із змінною вагою точок на місцевості. Однак розміщення центрів за певними критеріями оптимальності і обмеженнями для сучасних ГІС ще не є властивим.

На даний момент в Україні розроблена Геоінформаційна система попередження надзвичайних ситуацій [38] – картографічно-аналітичний ресурс, який спеціалізується на інформації щодо техногенної та пожежної безпеки і цивільного захисту, використовується для збору, збереження, накопичення, аналізу та відображення відповідних даних, моніторингу за станом інфраструктури й оцінювання потенційних наслідків НС. Орієнтовний набір шарів ГІС включає: територіальні підрозділи й об'єкти цивільної оборони; зони відповідальності підрозділів ДСНС; зони надзвичайних подій; техногенні об'єкти та природні території підвищеної небезпеки; суб'єкти господарювання, що перебувають на контролі ДСНС; 5) розміщення систем оповіщення населення. За допомогою ГІС моделюються зони природних катаклізмів.

Створенню ГІС з інформацією про надзвичайні ситуації, яка дозволить спростити їх оброблення, аналіз і прогноз, присвячено роботу [39].

В [40] аргументовано нагальна потреба розвитку та удосконалення програмних продуктів, що використовуються у підрозділах ДСНС, та їх технічного забезпечення, аби підтримувати обмін і зберігання картографічних даних для прийняття рішень щодо усунення наслідків НС та оцінювання ефективності рятувальних заходів.

Тому вирішення питань, пов'язаних із використанням сучасних ГІС-технологій для обґрунтування прийняття рішень щодо оптимального

розміщення захисних споруд або рятувальних об'єктів, складів предметів першої необхідності, а також зонування території обслуговування, є актуальним напрямком сучасних наукових досліджень.

Масова екстрена евакуація сама по собі є складним процесом, який іноді може призвести до хаотичних ситуацій та непередбачених наслідків. У багатьох сценаріях надзвичайних ситуацій масова евакуація необхідна, щоб упоратися із серйозними суспільними загрозами у вузьких просторово-часових межах. Аби краще зрозуміти складні явища, такі як масова евакуація, та вивчити можливі наслідки, розроблені агентні моделі, які імітують індивідуальну поведінку. Але їх реалізація під час застосування до великих географічних областей або складних форм поведінки викликає значні обчислювальні труднощі. Ключовою стратегією розв'язання таких задач є поділ транспортних мереж на дрібніші регіони та зниження відповідних обчислювальних витрат за рахунок використання сучасної кіберінфраструктури та кіберГІС. В роботі [41] розроблено новий алгоритм поділу мережі для покращення масштабованості агентного моделювання масової евакуації на основі сучасної обчислювальної інфраструктури за допомогою CyberGIS, яка використовує моделі просторового руху під час евакуації. Зокрема, представлений так званий алгоритм кластеризації Вороного на основі цільового зсуву (ViCTS), заснований на мережевих діаграмах Вороного. Як зазначають автори, за результатами обчислювальних експериментів ViCTS перевершує відомі алгоритми розподілу мережі щодо моделювання мікроскопічного трафіку за рахунок балансування обчислювальних навантажень і скорочення обміну даними між високопродуктивними паралельними обчислювальними ресурсами.

Вивченню оптимального планування аварійних притулків у невеликих гірських містах присвячено роботу [42]. В ній побудовано моделі багаторівневого розташування для різних класів аварійного укриття з метою мінімізації витрат на переїзд та будівництво і максимізації рівня покриття. Зокрема, визначається фактичне обслуговування аварійних притулків з

використанням програмного забезпечення ГІС та зваженої діаграми Вороного з урахуванням обмеженої ємності майданчика, а планування простору коригується шляхом поєднання фактичної міської землі з місцем будівництва.

У [43] за допомогою ГІС досліджується питання: як аварійні притулки можуть адаптуватися до середовища з багатьма небезпеками. Фізична придатність загальних міських ресурсів спочатку оцінюється шляхом вибору відповідних ресурсів і безпечних місць для аварійних притулків у контексті масштабних катастроф. Аналізуючи просторовий розподіл населення постраждалих територій та за різних типів сценаріїв стихійного лиха, автори прогнозують попит на різні види притулків. Враховуючи охоплення постраждалих, притулки розподіляються в районах з різними умовами.

Моделі для вибору оптимального просторового розподілу центрів екстреної евакуації серед наявних шкіл, коледжів, лікарень та пожежних станцій з метою покращення планування аварійних ситуацій при повені розроблені [44]. На першому кроці сформовані карти сприйнятливості до повеней з використанням моделей машинного навчання, включаючи: нейронну мережу Левенберга–Марквардта, нейронну мережу та дерева рішень та метод прийняття багатокритеріальних рішень. Запропоновано математичні підходи в ГІС для чотирьох добре відомих задач, що впливають на час аварійного порятунку: максимальне охоплення, максимальна відвідуваність, місцезнаходження p -медіани і покриття множини. Результати показали, що запропоновані моделі можуть бути використані для покращення планування розподілу центрів екстреної евакуації, їх використання сприятиме зменшенню людських жертв, матеріальних втрат та покращенню аварійної роботи.

У той час, як стихійне лихо виникає внаслідок природних небезпек на землі (таких як повені, землетруси, виверження вулканів, урагани, цунамі тощо), техногенні катастрофи спричинені поведінкою людей. Деякі з них включають, серед іншого, нещасні випадки на виробництві, транспорті або в охороні здоров'я, тероризм, злочини проти людства. Важливо констатувати, що однією з найбільш руйнівних типів техногенних катастроф може бути

воєнний конфлікт, оскільки він має важкі і довгострокові наслідки, викликає серйозні проблеми – збитки для країни, навколишнього середовища, інфраструктури; медичні послуги; нестача їжі, води та інших ресурсів, переміщення населення та спалахи захворювань. Автори [45] зосередилися на визначенні місць розташування підрозділів Центру первинної медико-санітарної допомоги в губернаторстві Ідлебі, Сирія. Дані витягуються із вибірки, яка містить 23 підрайони губернаторства і налічують 338 громад. Авторами сформульована задача змішаного цілочисельного програмування, яка інтегрована з системою-ГІС (ArcMap). Модель розв'язана за допомогою пакету оптимізації, а для більш поглибленого вивчення проблеми проведений аналіз чутливості моделі.

Інтеграція запропонованої в [46] моделі в ГІС забезпечила планування і перевірку ефективності просторового розподілу медичних послуг та надала можливість генерувати альтернативи, пропонуючи активізацію нових або покращення існуючих послуг. Авторами роботи проаналізовано доступність зон обслуговування мережі, які поділяються на декілька типів: державні та спеціалізовані лікарні, медичні пункти, медпункти, лазарети, поліклінічні комплекси та ін.

В останні роки збільшення кількості ураганів та інших прибережних небезпек у США становить величезну загрозу для жителів прибережних штатів. За даними Національного центру ураганів, Флорида є найбільш вразливим прибережним штатом. Для надання екстрених послуг шляхом евакуації людей із небезпечної зони була сформульована Політика пом'якшення наслідків. Багато з евакуйованих, особливо людей похилого віку або осіб з низькими доходами, покладаються на евакуаційні притулки для тимчасового житла. В [47] вирішується проблема оцінювання існуючих та можливих притулків (школи, коледжі, церкви та громадські центри), доступних в штаті, з оглядом на особливості місцевості. Досліджуються наступні питання:

– Скільки притулків-кандидатів розташовано у фізично придатних зонах (наприклад, не в зоні, схильній до повеней, не поблизу небезпечних об'єктів тощо)?

– Скільки існуючих притулків розташовано у фізично непридатних територіях, але в соціально придатних районах (розташованих у зонах з попитом)?

– Скільки альтернативних існуючих та/або притулків-кандидатів з високою/дуже високою фізичною придатністю розташовано поблизу фізично непридатних існуючих притулків і, таким чином, можуть бути кращим вибором для притулку?

– Скільки існуючих притулків, розташованих у фізично непридатних районах, не знаходяться поблизу альтернативних існуючих та/або притулків-кандидатів?

Так звана модель придатності на основі ГІС, що інтегрує зважену лінійну комбінацію з технікою скринінгу «Пройшов/не пройшов», була реалізована для 17 округів Південної Флориди.

В роботі [48] авторами запропоновано застосування оптико-геометричного підходу для оптимального розміщення декількох логістичних центрів і розподілу за ними споживачів, які неперервно розподілені на усьому полігоні обслуговування. Останній суттєво відрізняється від більшості методів, що вивчаються у науковій літературі, адже передбачає побудову фронтів світлової хвилі з певною множиною початкових джерел збудження. Саме на неперервній постановці таких задач зроблено акцент задля найбільш повного врахування географічних та соціальних умов, таких як наявність природних бар'єрів та забудівель, розподіл населення та інше.

В роботі [49] автори використовують геопросторовий інтелектуальний аналіз даних для врахування особливостей територій, що сегментуються.

Проблему конкурентного розташування об'єктів з передбаченням і врахуванням обмежень на відстань обслуговування розглянуто в [50]. Особливістю таких задач є припущення, що клієнти надаватимуть перевагу

об'єктам, які розміщені на відстані, не більшій за певну величину. Для візуалізації і для інтуїтивної інтерпретації розв'язку задачі використовується геоінформаційна система.

Роботу [51] присвячено багатокритеріальній оптимізації вибору місця розміщення для об'єкта біомаси, пов'язаного із поновлюваними джерелами енергії, з використанням деякого функціоналу сучасних ГІС.

Автономна GIS платформа, а саме GIS-FLSolution, представлена в роботі [52]. Вона розроблена також для задач оптимального розміщення статичних та логістичних об'єктів. Особливістю її є використання авторами власних алгоритмів STFLS. Платформа створена на MapObjects, має дружній графічний інтерфейс користувача і здатна, за ствердженнями авторів, успішно виконувати завдання.

Багатокритеріальна оптимізаційна модель, якій автори надали назву *p*-розподіленої задачі максимального покриття, запропонована в роботі [53]. Аби точніше оцінити потреби клієнтів, у цій моделі використовуються демографічні та споживчі дані, оцінені власно науковцями. Розроблений математичний і програмний інструментарій застосовано в Баварії (Німеччина) для вирішення проблеми вибору розважального сайту.

Класична проблема *p*-медіани модифікована в [54] шляхом урахування просторового розподілу ресурсів постачання та конкуренції між потенційними об'єктами. Модель проілюстровано на прикладі оптимального розташування анаеробних перетворювачів у конкретному районі Великобританії.

Проблемі розміщення міських об'єктів утилізації вторинної переробки із залученням сучасних ГІС приділяють увагу автори [55].

На оцінюванні місць зосередження велосипедних станцій на прикладі певного міста в Колумбії зосереджені автори [56]. Дослідження засноване на розподіленні користувачів системи між потенційними місцями скупчення транспортних засобів.

Роботу [57] присвячено плануванню раціонального розміщення закладів для престарілих. Тут використані геоінформаційні дані про надання щоденних

довгострокових комунальних та медичних послуг людям похилого віку, особливо пацієнтам з деменцією, враховані майбутні демографічні показники та прогнозний термін служби об'єктів.

В дослідженні [58] з використанням ГІС побудовано ієрархічну мережу розташування об'єктів, які пристосовані для зниження шкоди, що завдають міські небезпечні підприємства. В роботі [59] ГІС-технології у поєднанні з методами розв'язання задач розміщення-розподілу застосовано для ефективної організації збору сміття з переробкою відходів.

Авторами дослідження [60] продемонстровано можливість інтеграції математично аргументованих, загальнодоступних демографічних даних ГІС-технологій для оцінки потенційних місць розміщення закладів швидкої медичної допомоги та їх розміщення.

1.5. Важливість завчасного зонування території та планування запобіжних заходів на випадок потенційної техногенної аварії

Чимало наукових досліджень нині присвячується проблемам завчасного зонування території, для яких є потенційна загроза техногенної катастрофи або стихійного лиха.

На значущість запобіжних заходів та операцій наголошують автори [61], які запропонували два підходи щодо організації заздалегідь зон для планування певних дій в регіонах радіаційного впливу об'єктів атомної енергетики в разі аварії на них. За допомогою першого підходу зонування регіону здійснюється у відповідності з адміністративним його поділом, згідно другого – знаходяться менші підрегіони, які далі об'єднуються у кластери, застосовуючи математичні методи районування. Границі зон визначаються з урахуванням відстані до об'єкта випромінювання, щільності населення, потенційної дози випромінювання на забрудненій території. Шляхом визначення оптимальних розмірів кластерів, а також границь зміни дози

випромінювання авторам вдається зменшувати кількість мешканців, які помилково можуть бути евакуйовані чи відселені.

Для пом'якшення наслідків землетрусу в роботі [62] запропоновано математичну модель, яка передбачає два етапи: спочатку визначаються місця можливого розміщення притулків для первинного розміщення людей або складів першої медичної допомоги, враховуючи відстані, які проходять постраждалі від кризових районів до укриття. Далі вивчаються проблеми пом'якшення психологічного стану, покриття потреб людей після їх розміщення у відведених місцях. У математичному описі отримана модель є задачею цілочисельного лінійного програмування.

Орієнтація на людину характерна і для системи екстреної допомоги, створеної і описаної у роботі [63]. Тут введено до розгляду вартість сприйняття болю постраждалими, і, конструюючи модель спільної взаємодії держава-підприємство та розміщення-розподілення аварійних матеріалів, автори намагаються досягти мінімальних витрат на організацію аварійно-рятувальної системи.

Дворівнева стохастична задача розміщення укриття запропонована також і в роботі [64]. Тут змодельовані чотири сценарії для дослідження оптимальної кількості та розташування укриття для евакуації у будні, нічні часи, вихідні дні та на період відпусток мандрівників, які приїжджають до невеликого міста. Продемонстровано на результатах розрахунків, що різним сценаріям відповідає різне число та різні місця розташування захисних споруд для проведення оптимальної евакуації. Метод розв'язання побудованої задачі – генетичний алгоритм.

На правильне розташування аварійного укриття у період землетрусу наголошують автори [65]. Вони сформулювали задачу мінімізації загального зваженого часу евакуації з житлових районів до захисних споруд та мінімізації загальної площі усіх притулків з обмеженнями на їх місткість та радіус обслуговування. Показано, що розв'язання таких задач сприяє зменшенню кількості жертв серед мешканців постраждалого регіону, визначаючи безпечні

притулки та ефективні шляхи евакуації у хаотичний період. Ускладняється вирішення проблеми розміщення-розподілу різними строгими обмеженнями та дискретною допустимою множиною розв'язків.

В статті [66] проведений аналіз просторового розподілу національних засобів аероевакуації на островах Егейського моря. Автори аргументовано доводять корисність такої просторової аналітики для прийняття рішень щодо евакуаційних процесів в районах з динамічною сезонністю населення протягом року. Роботу зосереджено на моделі розташування баз для гелікоптерів.

Багатоцільова, ієрархічна математична модель задачі розміщення укриття від землетрусу розроблена в дослідженні [67]. З усіх можливих місць визначається, по-перше, які з них мають виконувати роль аварійного укриття, по-друге, котрі варто використовувати довгостроково. Одночасно здійснюється оптимальний розподіл населення по цим притулках. Моделюючи пошук аварійного та довгострокового укриття, автори намагаються мінімізувати загальний зважений час евакуації та загальну площу укриття. Побудовані моделі реалізовано з використанням алгоритму оптимізації рою часток із перемещуванням та генетичного алгоритму.

Визначенню множини точок, які б забезпечували заданий коефіцієнт досяжності для певної точкової множини на площині присвячено роботу [68]. В роботі [69] таку проблему вивчають як задачу визначення видимості. Інші підходи щодо розміщення захисних споруд або оглядових точок на поверхні, за якою ведеться спостереження, запропоновано в [70] та [71] відповідно.

Зазвичай, екстрена евакуація **носить динамічний характер**, позаяк інтенсивність надзвичайної ситуації, а також її наслідки, змінюються у часі. Поведінка трафіку у період аварійних ситуацій, як правило, є непередбачуваною. Тому необхідно обробляти динамічні дані про ситуацію, адже можливі паніка, зближення, нездатність відреагувати на попередження. У таких випадках важливим є планування альтернативних евакуаційних стратегій заздалегідь.

Проблемою **динамічного планування маршруту евакуації**, коли швидкість її потоку змінюється протягом горизонту планування через несподівані інциденти (дороги можуть бути недоступні через певні події – повені, лісові пожежі, обвалення конструкцій автомагістралі, аварії) переймаються автори [72]. Вони розробили підхід щодо зміни евакуаційних маршрутів для мережі з перешкодами, причому в декількох місцях та у різні часові періоди. Створена оптимізаційна модель за рахунок попередньої обробки даних про параметри, пов'язані з перешкодами на маршрутах та топологією евакуаційної мережі, авторами перетворена на лінійну, що дозволило зменшити навантаження на ЕОМ.

В [73] на основі рішення Парето, отриманого в дослідженні [74], запропоновано постановку задачі пріоритетної маршрутизації для евакуації постраждалих під час надзвичайних ситуацій за найменшої вартості та максимальної кількості населення, яке вдається транспортувати.

В [13] зазначено, що для загальної евакуації характерним є одночасне стікання усіх пішоходів до виходу. Пропускна здатність проходу при цьому виявляється неспроможною, аби витримати велике навантаження, а це може призвести до заторів. Крім того, ймовірність витоптування збільшується із збільшенням часу затору. Автори вказаної роботи вивчають, чи є можливою в критичних умовах упорядкована евакуація через перегородку, коли немає великої різниці між термінами організованої та безладної евакуації.

Безпечна та швидка евакуація постраждалих у закритому середовищі надзвичайної події обумовлена своєчасним виявленням надзвичайної ситуації, передбаченням його поширення, коректною оцінкою поточного місцезнаходження людей, визначенням оптимальних індивідуальних шляхів евакуації, а також запровадженням зручної та інтуїтивно зрозумілої системи навігації.

В роботі [75] представлена навігаційна система внутрішньої доповненої реальності, яка розроблена на базі машинного навчання, а також система екстреної евакуації, яка спроможна вказувати оптимальний евакуаційний

маршрут для окремих користувачів. Виявлення екстрених подій і даних зондування здійснюється за допомогою спеціальної мережі з підтримкою Інтернету речей. Локація людей оцінюється за допомогою глибокої нейронної мережі на основі потужності отриманого сигналу від вузлів-маяків. Оптимальний шлях для кожної людини визначається методом Q-навчання на основі інформації про конструкцію будівлі і контекст надзвичайної ситуації. Ефективність розробленої системи експериментально підтверджена на різних сценаріях НС.

Евакуація натовпу пішоходів вивчається також у роботі [76]. Авторами розроблена імітаційна модель з використанням методів штучного інтелекту. Модель і метод її реалізації дозволяють знайти найбільш безпечні щодо евакуації зони. Для найкращого вибору серед багатьох запропонованих місць розташування дверей проводиться оцінка середнього часу евакуації людей з кожного місця їх розташування до виходу, і вирішується питання, де саме потрібно розмістити вихідні двері. Методику перевірено на різних сценаріях.

В роботі [77] авторами створена концептуальна модель безпеко-орієнтованого управління проектами в системі ЦЗ із урахуванням нормативно-правової бази України, розмірів виникнення НС, стану середовища, факторів успішної реалізації проектів. До уваги взято й можливий психофізіологічний стан постраждалого населення. Сформульовано стратегічні цілі й зазначено показники результативності. Запропонована модель відтворює маршрути руху людських потоків з об'єктів їхнього скупчення у захисну споруду, а також оцінює параметри, які впливають на пересування людей окремими евакуаційними ланцюжками і мають бути враховані при визначенні часу реалізації проектів ЦЗ.

Отже, підвищення ефективності програми створення та розвитку системи техногенної безпеки потребує використання методів та моделей, побудованих на основі системного підходу та безпеко-орієнтованого управління з використанням сучасних інформаційних технологій.

1.6. Оптимальне розбиття і багатократне кульове покриття континуальних множин як математичний апарат для моделювання зон аварійного планування й реалізації захисних заходів, недосконалість моделей

Задачі ефективної організації виробничих мереж та оптимального розбиття множин (ОПМ) складають один з напрямків сучасної оптимізаційної теорії, який активно розвивається [78 – 97 та ін.]. Їх часто ідентифікують як *Optimal set partitioning problem*, або *Continuous Facility location problem*, або *Location-Allocation Problem*. За їх допомогою певну територію розділяють на зони, клієнти кожної з яких обслуговуватимуться лише одним сервісним центром. Вибір найкращого розбиття із множини альтернативних варіантів проводиться згідно деякого критерія оптимальності, приміром, мінімізуючи витрати на надання або отримання послуги. Парами «сервісний центр – клієнти» можуть бути: підприємства і споживачі, захисні споруди і населення, лікарні і пацієнти, пункти тимчасового розміщення (стаціонарні чи мобільні) та постраждалі від НС мешканці регіону, виборчі дільниці і виборці і т. п.

Серед розроблених на даний час моделей задач розбиття множин, розміщення центрів, задач покриття множин можна виділити лінійні та нелінійні, дискретні та неперервні, статичні і динамічні, з фіксованими центрами або з розміщуваними центрами, з обмеженнями на їхні потужності та без таких обмежень [91].

У більшості задач розбиття вважається, що споживачі розподілені в регіоні дискретно. Широкий огляд дискретних задач оптимального розбиття множин і методів їх розв'язування представлений у роботах [80, 81, 91]. Найбільш поширеною представником цього класу є задача розміщення-розподілу, в якій необхідно так розташувати оптимальну кількість нових об'єктів, аби вартість транспортування продукту від них до клієнтів була мінімальною, а потреби клієнтів були повністю задовільнені. Вперше, мабуть,

цю задачу було запропоновано у 1967 році в [78], а надалі її узагальнено для мережі (графів) [79, 81].

В задачі покриття множин передбачається, що споживач послуги може отримати її від будь-якого підприємства або сервісного центру, якщо відстань між клієнтом і об'єктом не перевершує деяке критичне значення, яке називається радіусом охоплення або відстанню покриття. У загальному випадку в задачі про покриття загальний попит намагаються задовольнити за рахунок найменшої кількості об'єктів. Математичну модель для задачі максимізації покриття представлено у дослідженні [101].

Серед практичних застосувань задачі про оптимальне покриття варто зазначити розміщення аварійних служб, вилучення даних, проектування схем перемикання, розташування захисної мережі (під час бойових дій), планування розкладу персоналу авіаліній, розподіл товарів та інші [102]. В контексті проблем, що виникають під час ліквідації або пом'якшення наслідків надзвичайних ситуацій від стихійних лих задачі покриття розглянуто в роботі [103].

Добре відомою і вивченою є задача про p -медіану, а також її узагальнення, коли споживачі з власних уподобань вибирають сервісний центр для свого обслуговування [104]. Для розв'язання такої задачі авторами розроблено генетичний алгоритм, якість одержуваних розв'язків якого оцінюється за допомогою формулювання відповідної задачі ЦЛП.

Дискретні задачі розбиття множин розв'язуються як заснованими на ідеї розгалужень методами, наприклад, методом гілок та меж, так і загальними методи дискретного програмування, зокрема, динамічного [105]. Існує ціла низка евристичних і мета-евристичних підходів на основі поєднання різних стратегій, їх порівняльна характеристика наведена в дослідженні [106].

У дослідженнях [100, 107] вивчається проблема розміщення центрів на мережі з деревовидною структурою. Розглядається задача мінімізації максимальної виваженої відстані між об'єктами. Тут запропоновано алгоритми двійкового пошуку з поліноміальним порядком обчислювальної складності, у

якому дані подаються в раціональному форматі, застосовуються ідеї паралелізму та параметричний підхід.

Якщо множина, що зонується, є континуальною, до назви задачі оптимального розбиття додають епітет «неперервна». Такі задачі досліджуються, приміром, в роботах [78, 79, 82 – 99 та ін.]. В [81, 82] показано, що обидві моделі задачі – і дискретна, і неперервна двовимірна розміщення-розбиття – є NP-повними задачами. Гарантовано отримати їхній оптимальний розв’язок можливо лише за допомогою повного перебору, а, відтак, лише за експоненціальний час.

Часто для розв’язання задачі оптимального розбиття на площині діаграми Вороного [96]. Дослідження [95] представляє неперервні задачі ОРМ, і описує універсальний підхід щодо розв’язання таких задач, а саме [94 – 96]: задачі ОРМ, математично сформульовані у вигляді задач нескінченновимірної мінімізації, редукуються до допоміжних скінченновимірних задач оптимізації недиференційованих функцій, залучаючи елементи теорії двоїстості. Розв’язання отриманих задач здійснюється за допомогою сучасних методів негладкої оптимізації, зокрема, модифікації r -алгоритму Шора [108, 109, 111]. Особливістю такого підходу для лінійних задач ОРМ є те, що вдається записати їх розв’язок у вигляді аналітичного виразу, який може містити параметри, що є оптимальними розв’язками вищезгаданих скінченновимірних задач оптимізації.

Існують задачі ОРМ лінійні та нелінійні, статичні та динамічні, багатопродуктові та однопродуктові, стохастичні та детерміновані, з обмеженнями та без обмежень тощо.

Різні варіанти динамічних задач ОРМ з лінійними і нелінійними критеріями якості розбиття детально вивчалися в [98, 112 – 122]. В роботах [115 – 119] сформульовано необхідні і достатні умови оптимальності для таких задач. Практичні застосування їх наведено в [120 – 123].

Далі наведена неперервна лінійна задача ОРМ при обмеженнях з розміщенням координат центрів підмножин [95], з оглядом на те, що у

дисертаційній роботі її буде узагальнено на випадок можливості перекриття підмножин. В теорії неперервних задач ОРМ використовують наступні позначення: Ω – обмежена множина у n -вимірному евклідовому просторі E_n ; $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)})$, $i = \overline{1, N}$, – точки, які називаються центрами (фіксовані або їх потрібно визначити).

Розбиттям множини Ω називається сукупність підмножин $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ з $\Omega \subset E_n$, якщо

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, N},$$

де $\text{mes}(\cdot)$ – міра множини.

Усі можливі розбиття множини Ω на підмножини (зони) $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ об'єднаємо в один клас, який позначимо так:

$$\Sigma_{\Omega}^N = \left\{ (\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N) : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, N} \right\}.$$

Рис. 1.2 демонструє розбиття множини $\Omega \subset E_2$ на чотири зони $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ з центрами в точках $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ відповідно.

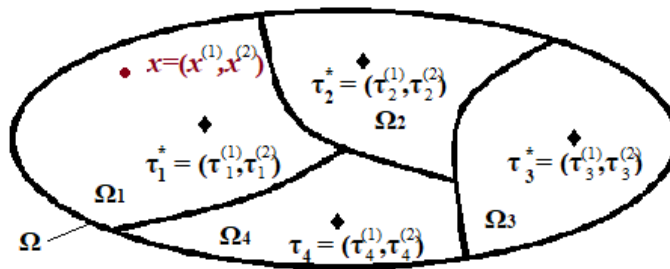


Рис. 1.2 Деяке розбиття області Ω на чотири зони

Неперервною лінійною задачею ОРМ при обмеженнях з нефіксованими центрами називається

Задача А.
$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}} F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\})$$

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}) = \sum_{l=1}^N \int_{\Omega_l} (c(x, \tau_l) / w_l + a_l) \rho(x) dx \quad (1.1)$$

за умов

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \rho(x) dx &= b_i, \quad i = \overline{1, p}, \\ \int_{\Omega_i} \rho(x) dx &\leq b_i, \quad i = \overline{p+1, N}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N, \{\tau_1, \dots, \tau_N\} \in \Omega^N,$$

де $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$; $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$; функції $c(x, \tau_i)$ – дійсні, обмежені, визначені на $\Omega \times \Omega$, вимірні по x для довільних векторів $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega$, $i = \overline{1, N}$; $\rho(x)$ – обмежена, вимірна, невід’ємна на множині Ω функція; $w_i > 0, a_i \geq 0, b_i \geq 0, i = \overline{1, N}$ – певні числа, за яких виконуються умови:

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 \leq b_i \leq S, \quad i = \overline{1, N}.$$

Окремими випадками задачі **A** є задачі, коли центри $\tau_1, \dots, \tau_N$ є фіксованими і/або не враховуються обмеження на їх потужності. Також існують більш ускладнені варіанти наведених задач, а саме: багатопродуктові, у яких розбиття області проводиться окремо за кожним продуктом.

Головним недоліком перелічених задач є отримання сервісних зон у вигляді просторових монополій, що часто не відображує реальність, адже клієнт може надавати перевагу не лише найближчому з центрів, а будь-якому з тих, що розташовані поруч.

Далі сформульовані оптимізаційні задачі розбиття заданої області на зони, які опановують споживачів послуги з однаковими k найближчими сусідніми сервісними центри серед N діючих або потенційних. Вважається, що споживачі кожної зони можуть отримувати послугу від будь-якого центра з k найближчих до нього. Такі постановки задач корисні, наприклад, для виявлення реальної сфери діяльності кожного центру з урахуванням своїх потужностей, отримання додаткової інформації про можливості існуючих сервісних центрів, про необхідність відкриття нових задля опанування всієї клієнтської аудиторії на території регіону тощо.

Задачі оптимального мультиплексного розбиття множин (ОМРМ) вперше представлені в роботі [110]. Там наведені аргументи щодо назви нового класу моделей і методів ОРМ і обов'язкового зазначення порядку розбиття, подібно сформованому у обчислювальній геометрії конструкту – діаграми Вороного k -го порядку, яка асоційована з N точками-генераторами (центрами) і поєднує клітинки Вороного k -го порядку [124].

Окремо можна виділяти задачі оптимального: дуплексного зонування території або неперервні задачі ОРМ 2-го порядку (duplex в перекладі з англ. мови означає розрахований на двоїх, спарений); триплексного зонування території або неперервні задачі ОРМ 3-го порядку (triplex – потрійний, строєний) і т. д.

Більш детальне уточнення назви нових задач здійснюється за аналогією із класифікацією, сформованої в теорії ОРМ [94, 95]. Приміром, слово «неперервні» вказує на континуальний тип множини, що зонується, а «лінійні» – на властивість функціоналу та обмежень задачі.

Нарешті, декілька слів про відмінність «мультиплексного» і «багатократного» розбиття множини. У першому випадку область розбивається на підмножини точок з однаковими наборами k найближчих сусідів із заданих N однорідних центрів. У другому випадку здійснюється звичайне розбиття області кілька разів поспіль. Приміром, в багатостадійних задачах ОРМ сервісні центри розрізняються за категоріями, і розбиття клієнтів здійснюється за кожною категорією окремо [97]. В багатопродуктових задачах ОРМ кожен сервісний центр може надавати кілька типів послуг, і зонування території здійснюється окремо за кожним з них [95, 96, 98].

1.7. Висновки за розділом I. Мета, задачі та методи досліджень

Проведено аналіз досліджень, пов'язаних з розробкою інформаційних технологій функціонування логістичних систем, математичним моделюванням і методами розв'язання оптимізаційних задач екстреної і гуманітарної логістики; розглянуто роботи, в яких розв'язуються задачі територіального розміщення логістичних центрів.

Удосконалення підходів щодо оптимального розміщення і використання рятувальних об'єктів на випадок надзвичайних ситуацій чи стихійного лиха, розробка нових моделей задач дозволить сформувати завчасно аварійні операції з метою пом'якшення впливу небезпек.

Незважаючи на наявність чималої кількості робіт щодо розв'язання задач розміщення притулків та об'єктів цивільного захисту, методологічні питання оцінки і вибору місць розміщення таких центрів з виділенням зон їх відповідальності потребують подальших досліджень.

Зазначено, що під час вирішення проблем запобігання або ліквідації наслідків від техногенних аварій або надзвичайних ситуацій сьогодні широко використовуються геоінформаційні системи і технології. В розділі наведено широкий огляд наукових публікацій з цього питання. Обґрунтовано необхідність використання геоінформаційних технологій і розширення функціональності сучасних ГІС щодо зонування території за критерієм відстані задля врахування потужності центрів і можливості перекриття зон їх функціонування.

Продемонстровано можливість використання моделей і методів теорії неперервних задач оптимального розбиття множин в якості математичного апарату моделювання і вивчення задач гуманітарної логістики. Існує потреба в удосконаленні існуючих моделей на випадок урахування потужності сервісних центрів і здійснення розбиття заданої території на зони їх впливу так, аби, у разі неможливості отримати обслуговування від найближчого центру, клієнт зміг скористатися послугами іншого, розташованого неподалік.

Узагальнення результатів аналізу заходів, які вживаються під час екстреної логістики в разі техногенних надзвичайних ситуацій, а також розроблених наукових основ і підходів щодо їх планування і організації, дозволило сформулювати мету та задачі досліджень.

Огляд літератури за темою досліджень представлений в публікаціях [95, 96, 110, 125 – 133, 135 – 138].

РОЗДІЛ II

МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ЗОНУВАННЯ ТЕРИТОРІЙ ТА РОЗМІЩЕННЯ СКЛАДІВ АВАРІЙНОГО ПОСТАЧАННЯ Й РОЗПОДІЛУ ПРЕДМЕТІВ ПЕРШОЇ НЕОБХІДНОСТІ

2.1. Загальна постановка задачі оптимального зонування територій і розміщення захисних споруд або складів аварійного постачання й розподілу предметів першої необхідності

Нехай в деякому регіоні є небезпечні (або потенційно небезпечні) території. Ними можуть бути, наприклад:

- території із забрудненням земель і ґрунтів з концентрацією, що перевищують встановлені гранично допустимі, небезпечними речовинами (пально-мастильними, біологічними, хімічними, радіоактивними тощо) внаслідок ненормального функціонування небезпечних підприємств;
- область з пошкодженою поверхнею через добування корисних копалин, зсув, ерозію, землетрус або перезволоження;
- зони, на яких введено особливий режим користування землями, утворені згідно до законодавства країни, зокрема, навколо об'єктів військового спрямування, для захисту населення чи довкілля і забезпечення нормального функціонування вказаних об'єктів у разі потенційних аварійних ситуацій.

Границі небезпечної зони визначаються розрахуванням можливого ураження. З метою ефективної організації аварійно-рятувальних або інших невідкладних робіт, спрямованих на збереження здоров'я мешканців, зниження розмірів збитків навколишнього середовища та матеріальних втрат у разі реальної загрози виникнення надзвичайних ситуацій техногенного характеру, потрібно розділити небезпечну територію на зони і закріпити їх за певними центрами, установами або об'єктами соціального призначення (далі,

сервісними центрами або просто центрами) для надання тих чи інших послуг. Такими центрами можуть виступати місця збору мешканців (далі споживачів, з урахуванням того, що центри надають деякі послуги) для евакуації в небезпечні райони; захисні споруди для розміщення населення, постраждалого від надзвичайної ситуації або стихійного лиха; склади аварійного постачання й розподілу предметів першої необхідності та ін. При цьому бажано передбачити можливість перекриття зон на той випадок, коли найближчий до користувача центр не зможе за тих чи інших обставин надати послугу. Звичайно, мешканці небезпечних територій мають бути завчасно оповіщені, до яких з найближчих центрів вони можуть звернутися за допомогою.

Якщо вказаних центрів не існує в регіоні, то бажано передбачити розташування певної їх кількості з урахуванням економічних, природних та інших характеристик, особливості територій та ступеня загрози виникнення небезпеки. Проведення невідкладних робіт щодо запобігання або ліквідації наслідків НС, відновлення інфраструктури регіону супроводжується створенням спеціалізованих служб цивільного захисту, і на певній території розміщуються об'єкти їх матеріально-технічної бази, аби забезпечити їх готовність до операцій за призначенням. Обсяг та зміст таких заходів визначаються на основі принципу необхідної достатності та залучення максимально можливої сукупності наявних сил та засобів.

Далі розглянемо різні математичні постановки і методи розв'язання описаних задач, які відрізняються наявністю або відсутністю додаткових умов на можливості центрів. Самі центри можуть бути вже існуючими, і тоді потрібно лише визначити їх зони обслуговування. Якщо таких центрів немає, то їх потрібно розмістити оптимальним чином (за певним критерієм).

2.2. Математичні моделі оптимального зонування територій і розміщення захисних споруд або складів аварійного постачання й розподілу предметів першої необхідності

2.2.1. Математичне моделювання оптимізації територіального зонування з урахуванням можливості перекриття зон

Розглянемо наступну задачу зонування території регіону Ω на зони обслуговування розміщених центрів $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$. Будемо вважати, що в кожній точці x області Ω за допомогою соціологічних досліджень або сучасних геоінформаційних технологій можна оцінити кількість мешканців (клієнтів, споживачів або користувачів). Нехай $\rho(x)$ – функція попиту на послугу; $c(x, \tau_i)$ – вартість надання послуги клієнту в точці $x \in \Omega$ центром τ_i , яку часто вважають пропорційною відстані між центром і клієнтом; a_i – витрати на облаштування нового центру або модернізацію діючого в точці τ_i або фіксовані організаційні витрати, які розраховуються на одиницю попиту, $i = \overline{1, N}$; $b_1, b_2, \dots, b_N$ – величини, які визначають потужності центрів, тобто максимально можливий обсяг послуг, що ними надається.

Потрібно розбити територію регіону на зони $\Omega_{\sigma_l}, l = \overline{1, L}$, з клієнтами, у котрих однакові k найближчі сусідні центри $\{\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, \dots, \tau_{j_k^l}\}$ серед N існуючих (чи можливих). Тут $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, \dots, j_k^l\}$ – сукупність індексів центрів, асоційованих із зоною Ω_{σ_l} . Розбиття області Ω на зони потрібно виконати, беручи до уваги потужність кожного j -го центру та частку γ_j^l , яку він займає на території Ω_{σ_l} , серед обслуговуючих її об'єктів $\{\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, \dots, \tau_{j_k^l}\}$. Величини γ_j^l вважатимемо пропорційними «потужностям» центрів.

Для формулювання математичної постановки задачі скористаємося термінологією і символікою, прийнятою в теорії ОРМ [94, 95], і покажемо включення до нового класу задач мультиплексного зонування територій лінійних неперервних задач ОРМ.

Нехай Ω – обмежена, замкнена двовимірна множина, $\tau_i \in \Omega$, $i = 1, 2, \dots, N$, – деякі точки (сервісні центри, які можуть бути фіксованими або їх потрібно визначити), $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N$ – набір таких центрів.

Будемо використовувати наступні позначення: $N = \{1, 2, \dots, N\}$ – сукупність індексів усіх центрів; $M(N, k)$ – сукупність усіх k -елементних наборів з N , $|M(N, k)| = C_N^k = L$; $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, \dots, j_k^l\}$, $l = \overline{1, L}$, – елементи множини $M(N, k)$. Отже, кожній комбінації індексів σ_l множини $M(N, k)$ відповідає підмножина Ω_{σ_l} точок із Ω , $l = \overline{1, L}$. З підмножиною Ω_{σ_l} так само пов'язаний набір центрів $\{\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, \dots, \tau_{j_k^l}\}$.

Сукупність підмножин $\{\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \dots, \Omega_{\sigma_L}\}$ з $\Omega \subset E^2$ називається **розбиттям k -го порядку** множини Ω на її підмножини (зони) $\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \dots, \Omega_{\sigma_L}$, якщо

$$\bigcup_{l=1}^L \Omega_{\sigma_l} = \Omega, \text{mes}(\Omega_{\sigma_i} \cap \Omega_{\sigma_j}) = 0; \sigma_i, \sigma_j \in M(N, k), i \neq j, i, j = \overline{1, L}.$$

У даному виразі $\text{mes}(\cdot)$ означає міру множини.

Підмножини $\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \dots, \Omega_{\sigma_L}$ називаються **підмножинами (зонами) k -го порядку** множини Ω .

Приміром, розбиття другого порядку певної множини для вісьмох центрів наведено на рис. 2.1. Тут підмножини 2-го порядку Ω_{σ_l} позначені з фіксацією індексів $\Omega_{j_q j_p}$. Далі на рисунках для підмножин Ω_{σ_l} будемо використовувати і такі позначення: $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l\}$ або (j_1^l, j_2^l) , наприклад, $\Omega_{78}, \{7, 8\}$ чи $(7, 8)$.

Нехай для N центрів $\Sigma_{\Omega}^{N, k}$ – клас усіх можливих розбиттів k -го порядку множини Ω :

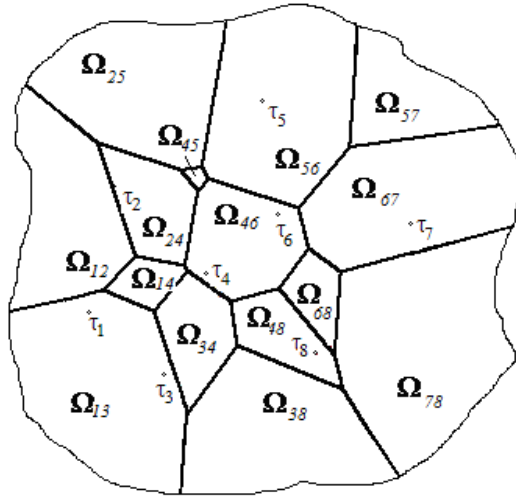


Рис. 2.1 Дуплексне розбиття області, асоційоване з 8-ма центрами

$$\Sigma_{\Omega}^{N,k} = \left\{ \bar{\omega} = \{\Omega_{\sigma_1}, \dots, \Omega_{\sigma_L}\} : \bigcup_{l=1}^L \Omega_{\sigma_l} = \Omega, \quad \text{mes}(\Omega_{\sigma_i} \cap \Omega_{\sigma_j}) = 0, \right. \\ \left. \sigma_l, \sigma_j \in M(N, k), i \neq j, \quad i, j = \overline{1, L} \right\}.$$

Задача А-к. $F(\bar{\omega}, \tau^N) = F(\{\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \dots, \Omega_{\sigma_L}\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}) \rightarrow \min_{\substack{\bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^{N,k} \\ \tau^N \in \Omega^N}},$

$$\sum_{\substack{l=1 \\ l: i \in \sigma_l}}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x) dx = b_i, \quad i = \overline{1, p}, \quad \sum_{\substack{l=1 \\ l: i \in \sigma_l}}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{p+1, N}, \quad (2.1)$$

де $x = (x^{(1)}, x^{(2)}) \in \Omega$; координати центру $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}) \in \Omega$, для всіх $i = \overline{1, N}$, наперед невідомі; $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, \dots, j_k^l\}$ – сукупність індексів центрів $\{\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, \dots, \tau_{j_k^l}\}$, асоційованих із зоною Ω_{σ_l} , $l = \overline{1, L}$; $\rho(x)$ – обмежена, невід’ємна в області свого визначення функція. Величини γ_j^l ліворуч у обмеженнях є такими, що для всіх $j = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, L}$:

$$0 \leq \gamma_i^l \leq 1, \quad \gamma_{j_1^l}^l + \gamma_{j_2^l}^l + \dots + \gamma_{j_k^l}^l = 1. \quad (2.2)$$

Задачу **А-к** будемо називати задачею оптимального розбиття (зонування) k -го порядку континуальної множини Ω при обмеженнях з

розміщенням центрів або, стисло, *задачею оптимального мультиплексного розбиття множини при обмеженнях з розміщенням центрів*.

Пару $(\bar{\omega}^*, \tau^{N*})$, яка задовольняє обмеження (2.1) і за якої функціонал $F(\bar{\omega}, \tau^N)$ досягає свого найменшого значення, будемо вважати *оптимальним розв'язком задачі А-к*.

Якщо припустити, що розподіл попиту на послуги по всій області Ω здійснюється у пропорційності потужностей центрів, то для всіх $l = \overline{1, L}$ і для всіх $j = \overline{1, N}$, $j \in \sigma_l$, величина γ_j^l може бути задана наступним виразом: $\gamma_j^l = b_j / \sum_{q: q \in \sigma_l} b_q$. За таких припущень обмеження (2.1) вказують на те, що можливості центрів $\tau_i, i = 1, \dots, p$, потрібно використати повністю, а можливості решти центрів $\tau_i, i = p + 1, \dots, N$, є обмеженими.

2.2.2. Критерії якості мультиплексного розбиття множин та їх застосування в системах екстреної логістики

Класифікацію задач оптимального мультиплексного розбиття континуальних множин наведемо у відповідності до властивостей функцій, які включено до постановки, та типами умов, що накладаються на змінні.

Розрізняють задачі ОМРМ без обмежень та задачі ОМРМ з інтегральними обмеженнями у вигляді (2.1); із заданими центрами або з їх оптимальним розташуванням.

За способом задання критерію якості розбиття і розміщення $F(\bar{\omega}, \tau^N)$ варто розрізняти задачі ОМРМ лінійні, нелінійні, негладкі та інші.

Зокрема, лінійна задача ОМРМ при обмеженнях з розміщенням центрів – це задача А-к, в котрій функціонал має вигляд

$$F_1(\bar{\omega}, \tau^N) = \sum_{l=1}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \sum_{i \in \sigma_l} (c(x, \tau_i) / w_i + a_i) \rho(x) dx,$$

де $c(x, \tau_i)$ – обмежені, визначені на $\Omega \times \Omega$ функції, вимірні по x ; $\rho(\cdot)$ –

обмежена, вимірна, невід’ємна на Ω функція; величини $w_i > 0$, $a_i \geq 0$, $i = \overline{1, N}$, – задані числа.

Аналогічно задачам оптимального розташування центрів на графах [91, 109], задачу **A- k** з критерієм F_1 називатимемо **мінісумною** задачею ОМРМ.

Нелінійними задачами ОМРМ є задачі **A- k** , в котрих критерій якості розбиття набуває, приміром, вигляду одного з наступних функціоналів [137, 138]:

$$F_2(\bar{\omega}, \tau^N) = \sum_{l=1}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \max_{i \in \sigma_l} (c(x, \tau_i)/w_i + a_i) \rho(x) dx;$$

$$F_3(\bar{\omega}, \tau^N) = \sum_{l=1}^L \sup_{x \in \Omega_{\sigma_l}} \max_{i \in \sigma_l} (c(x, \tau_i)/w_i + a_i) \rho(x);$$

$$F_4(\bar{\omega}, \tau^N) = \max_{l=\overline{1, L}} \sup_{x \in \Omega_{\sigma_l}} \max_{i \in \sigma_l} (c(x, \tau_i)/w_i + a_i) \rho(x),$$

де функції $c(x, \tau_i)$, $\rho(\cdot)$ та параметри $w_i > 0$, $a_i \geq 0$, $i = \overline{1, N}$ такі самі, як у $F_1(\bar{\omega}, \tau^N)$. Задачі розміщення центрів на графах зі схожими критеріями називаються **мінімаксними** задачами розміщення. Надалі будемо використовувати таку специфікацію і для задач ОМРМ.

В задачах ОМРМ функціями $c(x, \tau_i)$ часто слугують окремі випадки узагальненої відстані Мінковського:

$$- c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x^j - \tau_i^j)^2} \text{ – евклідова відстань};$$

$$- c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_\infty = \max_{j=1, \dots, n} \{ |x^j - \tau_i^j| \} \text{ – метрика «домінування» Чебишева};$$

$$- c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_1 = \sum_{j=1}^n |x^j - \tau_i^j| \text{ – Манхеттенська відстань (відстань}$$

міських кварталів).

На рис. 2.2 зображено розбиття 2-го порядку множини Ω з центрами $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_8$, коли $c(x, \tau_i)$ у виразі $F_1(\bar{\omega}, \tau^N)$ обиралися метриками: Евкліда (a),

Манхеттенською (*б*), Чебишева (*в*); $w_i = 1$, $a_i = 0$, $i = \overline{1,8}$. Обмеження (2.1) відсутні. Кожна зона Ω_{σ_i} , яка належить до дуплексного розбиття Ω , визначена парою індексів відповідних зоні центрів (j_1^l, j_2^l) . З $L = C_8^2 = 28$ підмножин $\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \dots, \Omega_{\sigma_L}$, що утворюють дуплексне розбиття Ω , з них 15 (рис. 2.2, *а, б*) і 14 (рис. 2.2, *в*) є непорожніми.

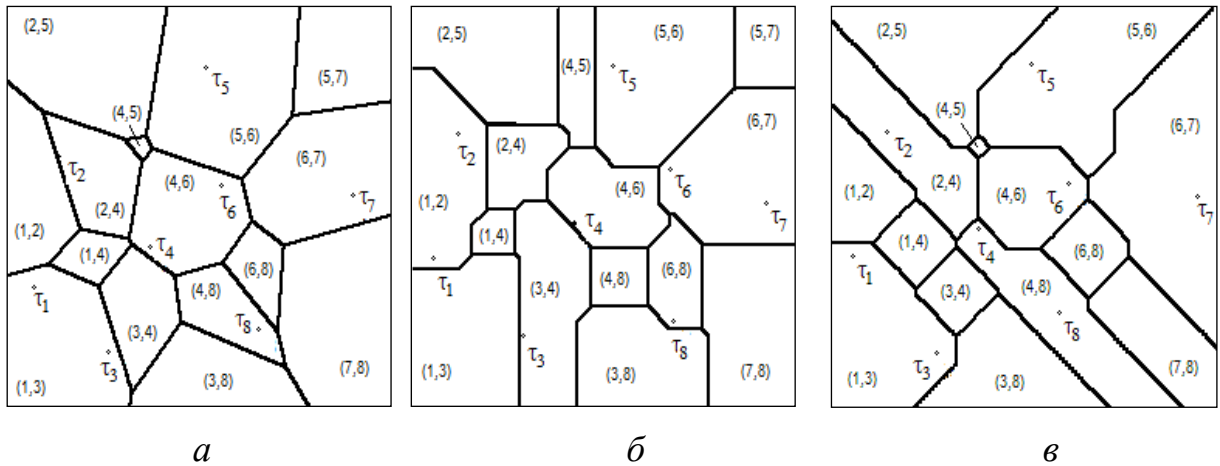


Рис. 2.2. Розбиття 2-го порядку для восьми центрів з метрикою:

а – Евкліда; *б* – Манхеттенською; *в* – Чебишева

Число пустих підмножин в мультиплексному розбитті множини визначається як положенням центрів $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_8$, так і метрикою, що визначає відстань між двома точками області. Приміром, усі розбиття на рис. 2.2 не містять підмножини (1,5), (4,7). У розбитті, зображеному на рис. 2.2, *в*, порожньою також виявилася підмножина (5,7).

За характером параметрів функціоналу $F(\bar{\omega}, \tau^N)$ можна виокремити: задачі ОМРМ детерміновані (коли всі параметри критерія та умов (2.1) точно визначені) та стохастичні (коли принаймні один з параметрів є випадковою величиною). Також варто окремо виділити задачі мультиплексного зонування в умовах неповної інформації.

За визначеністю та повнотою вхідної та результуючої інформації задачі слід відрізняти **чіткі** та **нечіткі задачі ОМРМ**. Вихідні дані у перших добре структуровані, у других – слабо або погано структуровані, і тому вимоги

визначеного розбиття послаблюються шляхом введення поняття нечітких зон $\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \dots, \Omega_{\sigma_L}$ з відповідними функціями приналежності, і тоді формулюється нечітка неперервна задача ОМРМ.

Залежність вхідних чи вихідних даних від часу обумовлює розділення задач ОМРМ на два класи: статичні (всі параметри не є функціями часу) та динамічні (хоча б одна з характеристик змінюється у часі, і постановка задачі містить диференціальне рівняння, яке описує її динаміку), як, наприклад, в [112, 113, 115, 119, 123].

Слід зазначити, що при вирішенні конкретних практичних питань математичні моделі неперервних задач ОМРМ, що виникають, можуть водночас належати різним класам.

Далі розглянемо інтерпретацію задачі $A-k$ з одним із наведених вище критеріїв в термінах задачі оптимального розміщення захисних споруд соціального призначення або складів матеріального постачання з одночасним зонуванням небезпечної території і закріпленням зон (мешканців) за певними спорудами.

Нехай на території збудовані (або планується побудувати) склади, призначені на випадок надзвичайної ситуації для забезпечення мешканців предметами першої необхідності або засобами індивідуального захисту. Вважається, що попит на такі засоби в кожній точці x області Ω можна визначити. Функція $\rho(\cdot)$ апроксимує попит, функції $c(x, \tau_i)$ описують відстань між споживачем та центром, $b_1, b_2, \dots, b_N$ – максимальний об'єм послуг або засобів, який можуть запропонувати відповідні центри. Константи γ_j^l в лівих частинах обмежень (2.1) відображають частину попиту, яку j -й об'єкт може охопити на території Ω_{σ_l} , серед об'єктів $\{\tau_{j_1}^l, \tau_{j_2}^l, \dots, \tau_{j_k}^l\}$, що обслуговують дану територію.

Критерій оптимальності розбиття тісно пов'язаний із специфікою центрів і послуг, які вони надають. Якщо розміщуваними об'єктами є аварійні, поліцейські, медичні заклади, тобто вкрай необхідні служби, а споживачі

щільно розподілені в регіоні Ω , то функціоналом якості розбиття, який потрібно мінімізувати, може бути відстань від центру обслуговування до найвіддаленішої точки регіону або час надання послуги (так звана оптимізація найгіршого варіанту). В найбільш загальній задачі формулюють мінімаксні задачі оптимального мультиплексного розбиття з фіксованими чи невідомими координатами центрів з одним із функціоналів $F_i, i = 2, 3, 4$, в яких передбачено надання потрібної послуги клієнту будь-яким з k найближчих центрів, враховуючи можливу відмову за певних об'єктивних причин центру, що знаходиться на найкоротшій відстані від нього.

У випадку, коли центрами є склади ЗІЗ або предметів першої необхідності, критерієм якості розбиття для задач ОМРМ може бути найменша сумарна зважена відстань від усіх клієнтів до k найближчих центрів. Записуючи математичну модель такої задачі розбиття, можна скористатись критерієм виду F_1 .

2.2.3. Окремі математичні постановки задач оптимального зонування територій

Окремі випадки задач ОМРМ можна отримати, якщо в задачі **A-k**, приміром, зафіксувати центри $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$, або виключити обмеження (2.1). Розглянемо деякі з постановок, які випливають із задачі **A-k**. Всі умови на функції і параметри, що входять до них, залишаються такими самими.

Задача A1-k. Лінійна задача ОМРМ з фіксованими центрами без обмежень:

$$F(\bar{\omega}) \rightarrow \min_{\bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^{N,k}},$$

$$F(\bar{\omega}) = \sum_{l=1}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \sum_{i \in \sigma_l} (c(x, \tau_i)/w_i + a_i) \rho(x) dx.$$

Оптимальний розв'язок задачі **A1-k** – розбиття k -го порядку $\bar{\omega}^* = \{\Omega_{\sigma_1}^*, \Omega_{\sigma_2}^*, \dots, \Omega_{\sigma_L}^*\}$, за якого функціонал F досягає свого найменшого значення.

Задача A2-k. Лінійна задача ОМРМ з розміщенням центрів без обмежень:

$$F(\bar{\omega}, \tau^N) \rightarrow \min_{\substack{\bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^{N,k} \\ \tau^N \in \Omega^N}},$$

$$F(\bar{\omega}) = \sum_{l=1}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \sum_{i \in \sigma_l} (c(x, \tau_i)/w_i + a_i) \rho(x) dx.$$

Оптимальний розв'язок задачі **A2-k** – це пара $(\bar{\omega}^*, \tau_*^N) = (\{\Omega_{\sigma_1}^*, \Omega_{\sigma_2}^*, \dots, \Omega_{\sigma_L}^*\}, \{\tau_1^*, \tau_2^*, \dots, \tau_N^*\})$, яка відповідає найменшому значенню функціонала F .

Задача A3-k. Лінійна задача оптимального мультиплексного розбиття континуальної множини при обмеженнях у формі рівностей і нерівностей з заданими центрами:

$$F(\bar{\omega}) \rightarrow \min_{\bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^{N,k}},$$

$$\sum_{\substack{l=1 \\ l: i \in \sigma_l}}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x) dx = b_i, \quad i = \overline{1, p}, \quad \sum_{\substack{l=1 \\ l: i \in \sigma_l}}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{p+1, N},$$

центри τ_i , $i = \overline{1, N}$, є заданими. Коефіцієнти γ_i^l відповідають умовам (2.2). Тут $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, \dots, j_k^l\}$ – сукупність індексів центрів $\{\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, \dots, \tau_{j_k^l}\}$, пов'язаних із підмножиною Ω_{σ_l} , $l = \overline{1, L}$.

Оптимальний розв'язок задачі **A3-k** – це розбиття k -го порядку $\bar{\omega}^* = \{\Omega_{\sigma_1}^*, \Omega_{\sigma_2}^*, \dots, \Omega_{\sigma_L}^*\}$, на котрому досягається найменше значення F .

При $k = 1$ задачі **A-k**, **A1-k**, **A2-k**, **A3-k** з критерієм якості розбиття $F_1(\bar{\omega}, \tau^N)$ є лінійними неперервними задачами ОРМ, дослідженими у [94]. Дійсно, якщо $k = 1$, то множина $M(N, 1)$ містить N таких елементів: $\sigma_l = \{j_1^l\} = \{l\}$, $l = \overline{1, N}$. Сукупність підмножин $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$ із Ω , котрі задовольняють наступну умову:

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, N},$$

є розбиттям 1-го порядку множини Ω на N підмножин [94]. Розглянемо клас всіляких розбиттів 1-го порядку множини Ω :

$$\Sigma_{\Omega}^N = \left\{ \bar{\omega} = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\} : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, N} \right\}.$$

Функціонал задачі ОРМ має вигляд:

$$F(\bar{\omega}, \tau^N) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) / w_i + a_i) \rho(x) dx,$$

а, з оглядом на те, що величини γ_j^l для всіх $j = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, L}$ ($L = N$) задовольняють обмеження (2.2), умови (2.1) записуються у наступній формі:

$$\sum_{\substack{l=1 \\ l: i \in \sigma_l}}^N \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x) dx = \int_{\Omega_i} \rho(x) dx = b_i, \quad i = \overline{1, p},$$

$$\sum_{\substack{l=1 \\ l: i \in \sigma_l}}^N \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x) dx = \int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{p+1, N}.$$

Відтак, добре вивчені неперервні лінійні задачі оптимального розбиття множин є окремим підкласом відповідних задач мультиплексного розбиття континуальних множин.

2.3. Моделювання і оптимізація зон в системах екстреної логістики з урахуванням існуючих складів аварійного постачання й розподілу предметів першої необхідності

2.3.1. Математичний опис задачі оптимізації зон відповідальності заданих центрів в системах екстреної логістики

Нехай Ω – обмежена, замкнена множина на площині, $(\tau_1, \dots, \tau_N)$ – набір центрів, координати яких відомі заздалегідь; $\Sigma_{\Omega}^{N,k}$ – клас всіх можливих розбиттів k -го порядку множини Ω на її підмножин $\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \dots, \Omega_{\sigma_L}$, що не перетинаються:

$$\Sigma_{\Omega}^{N,k} = \left\{ \bar{\omega} = \{\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \dots, \Omega_{\sigma_L}\} : \bigcup_{i=1}^L \Omega_{\sigma_i} = \Omega, \sigma_i \in M(N, k), \right. \\ \left. mes(\Omega_{\sigma_i} \cap \Omega_{\sigma_j}) = 0, i \neq j, i, j = 1, \dots, L \right\}.$$

Задача А1- k . Потрібно

$$F(\bar{\omega}) \rightarrow \min_{\bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^{N,k}},$$

де функціонал $F(\bar{\omega})$ має вигляд

$$F(\bar{\omega}) = \sum_{l=1}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \sum_{i \in \sigma_l} (c(x, \tau_i)/w_i + a_i) \rho(x) dx, \quad (2.3)$$

в якому координати $\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}$ центра τ_i , $i = \overline{1, N}$, фіксовані; функція $\rho(\cdot)$ є обмеженою невід'ємною на множині Ω ; функції $c(x, \tau_i)$ – обмеженими, визначеними на $\Omega \times \Omega$, вимірними за змінною x при довільному фіксованому τ_i із Ω для всіх $i = \overline{1, N}$; $w_i > 0$, $a_i \geq 0$, $i = \overline{1, N}$, – задані числа.

2.3.2. Обґрунтування методу оптимізації зон відповідальності заданих центрів. Критерії оптимальності

Задача А1- k записується через характеристичні функції підмножин, що утворюють розбиття аналогічно [94].

Нехай $\bar{\omega} = \{\Omega_{\sigma_1}, \dots, \Omega_{\sigma_L}\}$ – певне розбиття k -го порядку Ω . Кожній точці $x \in \Omega_{\sigma_l}$, $l = \overline{1, L}$, ставиться у відповідність LN -вимірний вектор $\lambda^l(x) = (\lambda_1^l(x), \dots, \lambda_N^l(x))$, координати якого визначаються наступним чином:

$$\lambda_i^l(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_{\sigma_l} \text{ \& } i \in \sigma_l, \\ 0 & \text{в іншому випадку} \end{cases} \quad i = \overline{1, N}, l = \overline{1, L}, \quad (2.4)$$

де $\sigma_l \in M(N, k)$, $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, \dots, j_k^l\}$ – індекси центрів $\{\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, \dots, \tau_{j_k^l}\}$, асоційованих із зоною Ω_{σ_l} . За допомогою (2.4) характеристичні функції зон Ω_{σ_l} , $l = \overline{1, L}$, які складають розбиття k -го порядку множини Ω , записуються у такому вигляді:

$$\chi_l(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_{\sigma_l}, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_{\sigma_l}, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \chi_l(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \in \sigma_l}}^N \lambda_i^l(x), \quad l = \overline{1, L}.$$

Аналогічно визначенню характеристичного (булевого) вектора підмножини скінченної множини в дискретній математиці, вектор-функцію $\lambda^l(\cdot) = (\lambda_1^l(\cdot), \dots, \lambda_N^l(\cdot))$, яка є визначеною на множині Ω , і координати якої задаються відповідно формули (2.4), вважатимемо **характеристичною вектор-функцією зони Ω_{σ_l} розбиття k -го порядку множини Ω** .

Задача **A1-k** формулюється в еквівалентній формі відносно характеристичних вектор-функцій підмножин, що складають розбиття k -го порядку множини Ω , наступним чином.

Задача B1-k. Знайти $\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_0^k} I(\lambda(\cdot))$,

$$I(\lambda(\cdot)) = \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^N [c(x, \tau_i)/w_i + a_i] \lambda_i^l(x) \rho(x) dx, \quad (2.5)$$

$$\Gamma_0^k = \left\{ \lambda(\cdot) = (\lambda^1(\cdot), \dots, \lambda^L(\cdot)): \lambda^l(x) = (\lambda_1^l(x), \dots, \lambda_N^l(x)), \right.$$

$$\left. \lambda_i^l(x) = 0 \vee 1, i = \overline{1, N}, \sum_{i=1}^N \lambda_i^l(x) = k, l = \overline{1, L}, \text{ м.в. для } x \in \Omega \right\}.$$

$\tau^N \in \Omega^N$ – заданий вектор, функції $c(x, \tau_i)$, $\rho(x)$ – такі самі як у функціоналі (2.3); $w_i > 0$, $a_i \geq 0$, $i = \overline{1, N}$, – задані числа.

Очевидно, що $F(\bar{\omega}) = I(\lambda(\cdot))$, де функціонали $F(\bar{\omega})$ і $I(\lambda(\cdot))$ мають вигляд (2.3) і (2.5) відповідно.

Від задачі **B1-k** нескінченновимірною математичного програмування з булевими змінними $\lambda_i^l(\cdot)$, $i = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, L}$, здійснюється перехід до відповідної задачі зі значеннями $\lambda_i^l(\cdot)$, $i = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, L}$, на відрізку $[0; 1]$.

Задача C1-k. Знайти

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_1^k} I(\lambda(\cdot)),$$

$$\Gamma_1^k = \left\{ \lambda(\cdot) = (\lambda^1(\cdot), \dots, \lambda^L(\cdot), \dots, \lambda^L(\cdot)): \lambda^l(x) = (\lambda_1^l(x), \dots, \lambda_N^l(x)), \right.$$

$$\left. 0 \leq \lambda_i^l(x) \leq 1, i = \overline{1, N}, \sum_{i=1}^N \lambda_i^l(x) = k, l = \overline{1, L}, \text{ м.в. для } x \in \Omega \right\},$$

за початкових даних задачі **B1-k**.

Очевидно, $\Gamma_0^k \subset \Gamma_1^k$, множина Γ_1^k є обмеженою, замкненою, опуклою множиною простору $L_2^{LN}(\Omega)$ з нормою $\|\lambda(\cdot)\| = \left(\int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^N [\lambda_i^l(x)]^2 dx \right)^{1/2}$.

Рис. 2.3 містить елемент з Γ_1^k для певної точки $x \in \Omega$.

Для кожного фіксованого $\tau^N \in \Omega^N$ критерій $I(\lambda(\cdot))$ є лінійним і неперервним відносно $\lambda(\cdot)$ на Γ_1^k . Тому мають місце наступні твердження.

Твердження 2.1. Обмежена замкнена опукла множина Γ_1^k з простору $L_2^{LN}(\Omega)$ при кожному $\tau^N \in \Omega^N$ є слабо компактною, включає хоча б одну кутову точку.

Твердження 2.2. Знайдеться принаймні одна кутова точка з Γ_1^k , в якій при фіксованому $\tau^N \in \Omega^N$ функціонал $I(\lambda(\cdot))$ досягає найменшого на множині Γ_1^k значення.

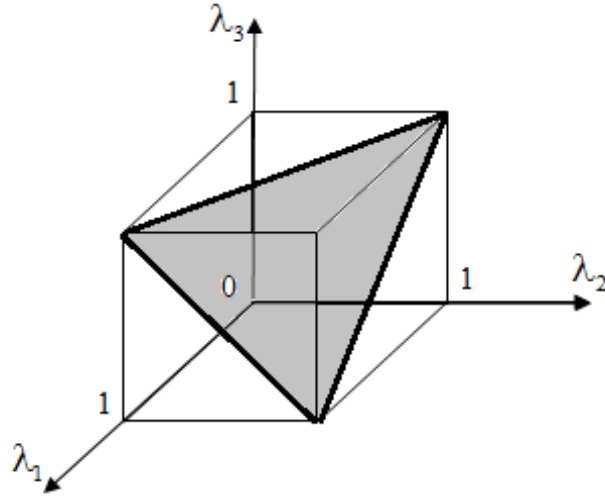


Рис. 2.3 Елемент множини Γ_1^2 , що відповідає певній точці $x \in \Omega$

Твердження 2.3. Точки, які є крайніми в множині Γ_1^k , відповідають характеристичним функціям певних підмножин k -го порядку Ω_{σ_l} , $l = \overline{1, L}$, що складають при кожному фіксованому $\tau^N \in \Omega^N$ розбиття k -го порядку множини Ω .

За теореми Вєрштрасса, функціонал $I(\lambda(\cdot))$ на Γ_1^k досягає своєї точної нижньої границі, відтак, задача **C1-k** має розв'язок.

Отже, серед розв'язків задачі **C1-k** знайдеться по крайній мірі одна кутова точка з Γ_1^k , компонентами якої є характеристичні функції зон Ω_{σ_l} розбиття k -го порядку Ω , $l = \overline{1, L}$. Тому деякі оптимальні розв'язки **C1-k** містяться серед оптимальних розв'язків **B1-k**, і розв'язання останньої зводиться до пошуку розв'язку **C1-k**.

Для задачі **C1-k** складемо функціонал Лагранжа:

$$\begin{aligned} W(\lambda(\cdot), \psi_0(\cdot)) &= \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \left[\sum_{i=1}^N [c(x, \tau_i) / w_i + a_i] \rho(x) \lambda_i^l(x) + \psi_0^l(x) \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i^l(x) - k \right) \right] dx = \\ &= \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \left\{ \sum_{i=1}^N [(c(x, \tau_i) / w_i + a_i) \rho(x) + \psi_0^l(x)] \lambda_i^l(x) - k \psi_0^l(x) \right\} dx. \end{aligned}$$

Функціонал $W(\lambda(\cdot), \psi_0(\cdot))$ визначено на множині $\Lambda \times \Phi$, де

$$\Lambda = \{\lambda(\cdot) \in L_2^{LN}(\Omega): 0 \leq \lambda_i^l(x) \leq 1, \forall x \in \Omega, i = \overline{1, N}, l = \overline{1, L}\};$$

$$\Phi = \{(\psi_0^1(\cdot), \psi_0^2(\cdot), \dots, \psi_0^L(\cdot)): \psi_0^l(\cdot) \in L_2(\Omega), l = \overline{1, L}\}.$$

На множині $\Lambda \times \Phi$ функціонал Лагранжа $W(\lambda(\cdot), \psi_0(\cdot))$ буде мати *сідлову точку* пару $(\hat{\lambda}(\cdot), \hat{\psi}_0(\cdot))$, якщо $\forall \lambda(\cdot) \in \Lambda, \psi_0(\cdot) \in \Phi$ має місце нерівність

$$W(\hat{\lambda}(\cdot), \psi_0(\cdot)) \leq W(\hat{\lambda}(\cdot), \hat{\psi}_0(\cdot)) \leq W(\lambda(\cdot), \hat{\psi}_0(\cdot)).$$

Для кожного $x \in \Omega$ вводиться до розгляду функція $(LN + L)$ змінних $Q(\lambda(x), \psi_0(x)) = \sum_{l=1}^L \{ \sum_{i=1}^N [(c(x, \tau_i)/w_i + a_i)\rho(x) + \psi_0^l(x)] \lambda_i^l(x) - k\psi_0^l(x) \}$, визначена на $\Lambda_x \times \Phi_x$, де Λ_x та Φ_x – перерізи відповідних множин при $x \in \Omega$.

Аби допустима пара $(\hat{\lambda}(x), \hat{\psi}_0(x)) \in \Lambda \times \Phi$ складала *сідлову точку* функціоналу $W(\lambda(\cdot), \psi_0(\cdot))$, необхідно й достатньо виконання для майже усіх $x \in \Omega$ наступної умови:

$$Q(\hat{\lambda}(x), \hat{\psi}_0(x)) = \max_{\psi_0(x) \in \Phi_x} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_x} Q(\lambda(x), \psi_0(x)).$$

Це означає, що при будь-якому $x \in \Omega$ пара $(\hat{\lambda}(x), \hat{\psi}_0(x))$ – *сідлова точка* функції $Q(\lambda(x), \psi_0(x))$ на множині $\Lambda_x \times \Phi_x$.

Нехай точка x – будь-яка фіксована з Ω . Позаяк функція $Q(\lambda(x), \psi_0(x))$ є сепарабельною, впливає наступна рівність:

$$\begin{aligned} & \max_{\psi_0(x) \in \Phi_x} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_x} Q(\lambda(x), \psi_0(x)) = \\ & = \max_{\psi_0(x) \in \Phi_x} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_x} \sum_{l=1}^L \{ \sum_{i=1}^N [(c(x, \tau_i)/w_i + a_i)\rho(x) + \psi_0^l(x)] \lambda_i^l(x) - k\psi_0^l(x) \} = \\ & = \sum_{l=1}^L \max_{\psi_0^l(x)} \left\{ \sum_{i=1}^N \min_{0 \leq \lambda_i^l(x) \leq 1} [(c(x, \tau_i)/w_i + a_i)\rho(x) + \psi_0^l(x)] \lambda_i^l(x) - k\psi_0^l(x) \right\}. \end{aligned}$$

Пара $(\hat{\lambda}(x), \hat{\psi}_0(x))$ утворюватиме *сідлову точку* для функції $Q(\lambda(x), \psi_0(x))$ на множині $\Lambda_x \times \Phi_x$, коли виконуватимуться наступні умови:

$$1) Q(\hat{\lambda}(x), \hat{\psi}_0(x)) = \min_{\lambda(x) \in \Lambda_x} Q(\lambda(x), \hat{\psi}_0(x));$$

$$2) \frac{\partial Q(\hat{\lambda}(x), \hat{\psi}_0(x))}{\partial \psi_0^l} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N \hat{\lambda}_i^l(x) - k = 0 \quad \forall l = \overline{1, L}.$$

У випадку довільного, але фіксованого вектору $\psi_0(x)$, функція $Q(\lambda(x), \psi_0(x))$ досягає свого найменшого значення за векторами $\lambda(x) \in \Lambda_x$,

$$\Lambda_x = \left\{ \lambda = (\lambda_1^1, \dots, \lambda_N^1, \dots, \lambda_1^L, \dots, \lambda_N^L) : 0 \leq \lambda_i^l \leq 1 \quad i = \overline{1, N}, l = \overline{1, L} \right\}$$

при $\hat{\lambda}(x)$, компоненти якого обчислюються за формулою: для кожного $i = \overline{1, N}, l = \overline{1, L}$

$$\hat{\lambda}_i^l(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (c(x, \tau_i)/w_i + a_i)\rho(x) + \psi_0^l(x) < 0, \\ 0, & \text{якщо } (c(x, \tau_i)/w_i + a_i)\rho(x) + \psi_0^l(x) > 0, \\ \alpha \in [0, 1], & \text{якщо } (c(x, \tau_i)/w_i + a_i)\rho(x) + \psi_0^l(x) = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Враховуючи те, що серед усіх розв'язків задачі **C1-k** важливо знайти лише крайні точки допустимої множини, в силу довільності вибору значення $\alpha \in [0, 1]$, коли $(c(x, \tau_i) + a_i)\rho(x) + \psi_0^l(x) = 0$, окремим випадком (2.6) можна вважати наступну формулу: для кожного $i = \overline{1, N}, l = \overline{1, L}$

$$\hat{\lambda}_i^l(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (c(x, \tau_i)/w_i + a_i)\rho(x) + \psi_0^l(x) < 0, \\ 0, & \text{якщо } (c(x, \tau_i)/w_i + a_i)\rho(x) + \psi_0^l(x) > 0 \\ 0 \vee 1, & \text{якщо } (c(x, \tau_i)/w_i + a_i)\rho(x) + \psi_0^l(x) = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Якщо $\psi_0(x) = \hat{\psi}_0(x)$, з урахуванням (2.6) і (2.7), то:

$$\sum_{i=1}^N \hat{\lambda}_i^l(x) - k = 0 \quad \forall l = \overline{1, L}. \quad (2.8)$$

Звідси, при кожному $l = \overline{1, L}$ серед компонент вектору $\hat{\lambda}^l(x) = (\hat{\lambda}_1^l(x), \dots, \hat{\lambda}_N^l(x))$ в (2.7) одиничними мають бути лише k компонент. Нехай $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, \dots, j_k^l\}$ – набір індексів, для яких виконуються нерівності:

$$\begin{aligned} (c(x, \tau_{j_m^l})/w_{j_m^l} + a_{j_m^l})\rho(x) + \hat{\psi}_0^l(x) &\leq 0, \forall j_m^l \in \sigma_l, m = \overline{1, k}, \\ (c(x, \tau_i)/w_i + a_i)\rho(x) + \hat{\psi}_0^l(x) &\geq 0, \forall i \in N \setminus \sigma_l, l = \overline{1, L}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Тоді (2.7) можна записати у такому вигляді:

$$\hat{\lambda}_i^l(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i \in \sigma_l, \\ 0, & \text{якщо } i \in N \setminus \sigma_l. \end{cases} \quad (2.10)$$

Відтак, через довільність вибору $x \in \Omega$ і номеру $l = \overline{1, L}$, вираз (2.10) визначає в ній характеристичні вектор-функції зони k -го порядку Ω_{σ_l} , асоційованої з центрами $\{\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, \dots, \tau_{j_k^l}\}$. Тобто, формули (2.9), (2.10) визначають умови приналежності x до Ω_{σ_l} .

Система нерівностей

$$\begin{cases} (c(x, \tau_{j_1^l})/w_{j_1^l} + a_{j_1^l})\rho(x) + \hat{\psi}_0^l(x) \leq 0, \\ (c(x, \tau_{j_2^l})/w_{j_2^l} + a_{j_2^l})\rho(x) + \hat{\psi}_0^l(x) \leq 0, \\ \dots \\ (c(x, \tau_{j_k^l})/w_{j_k^l} + a_{j_k^l})\rho(x) + \hat{\psi}_0^l(x) \leq 0, \\ -(c(x, \tau_i)/w_i + a_i)\rho(x) - \hat{\psi}_0^l(x) \leq 0, \quad i \in N \setminus \sigma_l. \end{cases} \quad (2.11)$$

є розв'язною, оскільки і **C1-k**, і **B1-k** мають розв'язки. Сумуючи в (2.11) попарно перші k нерівностей з i -ю нерівністю групи $N \setminus \sigma_l$, можна отримати наступні нерівності: для всіх $l = \overline{1, L}$ та $j \in \sigma_l$

$$(c(x, \tau_j)/w_j + a_j)\rho(x) \leq (c(x, \tau_i)/w_i + a_i)\rho(x), \quad \forall i \in N \setminus \sigma_l.$$

Твердження 2.4. Якщо в задачі **A1-k**: $\rho(x) \geq 0$ для всіх $x \in \Omega$ і розбиття k -го порядку $\bar{\omega}^* = \{\Omega_{\sigma_1}^*, \dots, \Omega_{\sigma_L}^*\} \in \Sigma_{\Omega}^{N,k}$ є оптимальним, то м. в. для $x \in \Omega_{\sigma_l}^*$:

$$c(x, \tau_j)/w_j + a_j \leq c(x, \tau_i)/w_i + a_i, \quad \forall j \in \sigma_l \text{ і } \forall i \in N \setminus \sigma_l, l = \overline{1, L}. \quad (2.12)$$

Через лінійність функціоналу задачі виконання нерівності (2.12) достатньо для забезпечення оптимальності розв'язку задачі **A1-k**.

Отже, якщо функція $\rho(x) \geq 0$ для всіх $x \in \Omega$, то оптимальним розв'язком задачі **B1-k** є вектор-функція $\lambda_*^l(\cdot) = (\lambda_{*1}^1(\cdot), \lambda_{*2}^1(\cdot), \dots, \lambda_{*L}^1(\cdot))$ з елементами, котрі обчислюються за формулою: м. в. для $x \in \Omega$

$$\lambda_{*i}^l(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } c(x, \tau_i)/w_i + a_i \leq c(x, \tau_j)/w_j + a_j, \\ & \text{одночасно } \forall i \in \sigma_l, j \in N \setminus \sigma_l \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases} \quad i = \overline{1, N}, l = \overline{1, L}. \quad (2.13)$$

Оптимальне значення функціоналу задачі **B1-k** дорівнює

$$I(\lambda^*(\cdot)) = \int_{\Omega} \min_{l=1, L} \left(\sum_{i \in \sigma_l} (c(x, \tau_i) / w_i + a_i) \right) \rho(x) dx. \quad (2.14)$$

Система нерівностей (2.12) для певної точки може мати місце для декількох наборів індексів $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, \dots, j_k^l\}$ і $\sigma_p = \{j_1^p, j_2^p, \dots, j_k^p\}$. Така ситуація можлива лише тоді, коли ці набори мають спільні елементи, а на симетричній різниці індексів $\sigma_l \Delta \sigma_q$ нерівність (2.12) перетворюється на рівність. Тоді у задачі С1- k є, принаймні, два розв'язки. Значення функціоналу (2.14) на них є однаковим. Неоднозначність вибору індексів усувається наступного шляхом: з індексів різниці $\sigma_l \Delta \sigma_q$, на яких $c(x, \tau_j) / w_j + a_j = c(x, \tau_i) / w_i + a_i$, обирається k найменших.

2.3.3. Алгоритм оптимального зонування області. Теоретичне дослідження форми границь між зонами

Алгоритм 2.1

Крок 1. Множину Ω заключити у прямокутник Π зі сторонами, паралельними осям системи координат, вважати $\rho(x) = 0$ для $x \in \Pi \setminus \Omega$. Паралелепіпед Π покрити сіткою.

Крок 2. Для кожного вузла x сітки:

2.1. Обчислити значення $R_i = (c(x, \tau_i) / w_i + a_i) \rho(x)$, $i = \overline{1, N}$.

2.2. Упорядкувати R_i , $i = \overline{1, N}$, за зростанням.

2.3. Скласти $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, \dots, j_k^l\}$ – набір центрів, котрі відповідають k найменшим значенням R_i ; визначити підмножину Ω_{σ_l} .

Крок 3. Обчислити оптимальне значення критерія задачі (2.3).

Кінець алгоритму.

Зауважимо, що обчислювальна складність алгоритму 2.1 визначається розміром сітки, кількістю виділених центрів, алгоритмом сортування.

Далі досліджено властивості задачі **A1-k** та її оптимальних розв'язків за конкретних умов щодо функцій $c(x, \tau_i)$ і $\rho(x)$.

Властивість 1. Якщо функція $\rho(x) \geq 0$ на Ω , $\bar{\omega}^* = \{\Omega_{\sigma_1}^*, \dots, \Omega_{\sigma_L}^*\} \in \Sigma_{\Omega}^{N,k}$ – оптимальне розбиття в задачі **A1-k**, а точки x належать межі між непустими підмножинами k -го порядку $\Omega_{\sigma_m}^*$ та $\Omega_{\sigma_l}^*$ ($m \neq l$; $m, l = \overline{1, L}$), то знайдеться така сукупність індексів $\zeta = \{j_1, \dots, j_r\}$, $1 \leq r < k$, що $(\zeta \subset \sigma_l) \& (\zeta \subset \sigma_m)$, і для $j \in \sigma_l \setminus \zeta$ і $i \in \sigma_m \setminus \zeta$ нерівність (2.12) перетвориться на рівність:

$$c(x, \tau_j) / w_j + a_j = c(x, \tau_i) / w_i + a_i \quad \forall j \in \sigma_l \setminus \zeta \text{ і } \forall i \in \sigma_m \setminus \zeta. \quad (2.15)$$

Покажемо це. Нехай $x \in \Omega$ – будь-яка фіксована точка на границі зон $\Omega_{\sigma_m}^*$ і $\Omega_{\sigma_l}^*$ ($m \neq l$; $m, l = \overline{1, L}$). Позаяк $x \in \Omega_{\sigma_m}^*$, сумісною є така система нерівностей:

$$c(x, \tau_j) / w_j + a_j \leq c(x, \tau_i) / w_i + a_i \quad \forall j \in \sigma_m \text{ і } \forall i \in N \setminus \sigma_m,$$

а через те, що $x \in \Omega_{\sigma_l}^*$, має місце наступна сукупність співвідношень:

$$c(x, \tau_j) / w_j + a_j \leq c(x, \tau_i) / w_i + a_i \quad \forall j \in \sigma_l \text{ і } \forall i \in N \setminus \sigma_l.$$

Звідси випливає:

$$c(x, \tau_j) / w_j + a_j \leq c(x, \tau_i) / w_i + a_i \quad \forall j \in \sigma_m \cap \sigma_l, \quad \forall i \in N \setminus \sigma_m;$$

$$c(x, \tau_j) / w_j + a_j \leq c(x, \tau_i) / w_i + a_i \quad \forall j \in \sigma_m \cap \sigma_l, \quad \forall i \in N \setminus \sigma_l.$$

Нехай $\zeta = \sigma_m \cap \sigma_l$, $\zeta = \{j_1, \dots, j_r\}$, $1 \leq r < k$. Тоді $\forall p \in \sigma_l \setminus \zeta$

$$c(x, \tau_p) / w_p + a_p \leq c(x, \tau_i) / w_i + a_i \quad \forall i \in N \setminus \sigma_l.$$

Якщо ж $p \in N \setminus \sigma_m$, то $c(x, \tau_p) / w_p + a_p \geq c(x, \tau_i) / w_i + a_i \quad \forall i \in \sigma_m$, а отже й для $i \in \sigma_m \setminus \zeta$. Відтак, $\forall i \in \sigma_m \setminus \zeta$ і $\forall p \in \sigma_l \setminus \zeta$ має місце подвійна нерівність

$$c(x, \tau_i) / w_i + a_i \leq c(x, \tau_p) / w_p + a_p \leq c(x, \tau_i) / w_i + a_i,$$

що є можливим лише у разі, коли $\forall i \in \sigma_m \setminus \zeta$ і $\forall p \in \sigma_l \setminus \zeta$ має справедливою є рівність (2.15), тобто: $c(x, \tau_p) / w_p + a_p = c(x, \tau_i) / w_i + a_i$.

Властивість 1 доведено.

Властивість 2. Якщо в задачі A1- k функція $\rho(x) \geq 0$ на Ω , $\bar{\omega}^* = \{\Omega_{\sigma_1}^*, \dots, \Omega_{\sigma_L}^*\} \in \Sigma_{\Omega}^{N,k}$ – оптимальне розбиття, а точки $x \in \Omega$ – кутові і належать границі між зонами k -го порядку $\Omega_{\sigma_m}^*$, $m \in \{l_1, l_2, \dots, l_s\}$, $1 \leq l_q \leq L, q = \overline{1, s}; s > 2$. Тоді існує така підмножина індексів $\zeta = \{j_1, \dots, j_r\}$, $1 \leq r < k$, що $\zeta \subset \bigcap_{q=\overline{1, s}} \sigma_{l_q}$, а для кожного індексу $i \in \sigma_{l_p} \setminus \zeta$, $p = \overline{1, s}$ знайдуться індекси j_q із множин $\sigma_{l_q} \setminus \zeta$, $\forall q \neq p, q = \overline{1, s}$, за яких нерівність (2.12) перетворюється на рівність, тобто:

$$c(x, \tau_{j_q})/w_{j_q} + a_{j_q} = c(x, \tau_i)/w_i + a_i \quad \forall q \neq p, q = \overline{1, s}. \quad (2.16)$$

Дійсно, нехай $x \in \Omega$ – довільна, але фіксована точка, яка належить межі між декількома непустими підмножинами k -го порядку $\Omega_{\sigma_m}^*$, $m \in \{l_1, l_2, \dots, l_s\}$, $1 \leq l_q \leq L, q = \overline{1, s}$. Через те, що $x \in \Omega_{\sigma_m}^*$, $m \in \{l_1, l_2, \dots, l_s\}$, сумісними є системи нерівностей

$$\begin{aligned} c(x, \tau_j)/w_j + a_j &\leq c(x, \tau_i)/w_i + a_i \quad \forall j \in \sigma_{l_1} \text{ і } \forall i \in N \setminus \sigma_{l_1}, \\ c(x, \tau_j)/w_j + a_j &\leq c(x, \tau_i)/w_i + a_i \quad \forall j \in \sigma_{l_2} \text{ і } \forall i \in N \setminus \sigma_{l_2}, \\ &\dots \\ c(x, \tau_j)/w_j + a_j &\leq c(x, \tau_i)/w_i + a_i \quad \forall j \in \sigma_{l_s} \text{ і } \forall i \in N \setminus \sigma_{l_s}. \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned} c(x, \tau_j)/w_j + a_j &\leq c(x, \tau_i)/w_i + a_i \quad \forall j \in \bigcap_{q=\overline{1, s}} \sigma_{l_q} \text{ і } \forall i \in N \setminus \sigma_{l_1}, \\ c(x, \tau_j)/w_j + a_j &\leq c(x, \tau_i)/w_i + a_i \quad \forall j \in \bigcap_{q=\overline{1, s}} \sigma_{l_q} \text{ і } \forall i \in N \setminus \sigma_{l_2}, \\ &\dots \\ c(x, \tau_j)/w_j + a_j &\leq c(x, \tau_i)/w_i + a_i \quad \forall j \in \bigcap_{q=\overline{1, s}} \sigma_{l_q} \text{ і } \forall i \in N \setminus \sigma_{l_s}. \end{aligned}$$

Нехай $\varsigma = \bigcap_{q=\overline{1, s}} \sigma_{l_q}$, $\varsigma = \{j_1, \dots, j_r\}$, $1 \leq r < k$. Тоді $\forall t \in \sigma_{l_p} \setminus \varsigma$, $p = \overline{1, s}$, $\forall i \in N \setminus \sigma_{l_p}$: $c(x, \tau_t)/w_t + a_t \leq c(x, \tau_i)/w_i + a_i$. Але коли $\forall t \in N \setminus \sigma_{l_p}$, $q = \overline{1, s}$,

$q \neq p$, має місце співвідношення $c(x, \tau_t)/w_t + a_t \geq c(x, \tau_i)/w_i + a_i \quad \forall i \in \sigma_{l_p}$, зокрема і $\forall i \in \sigma_{l_p} \setminus \zeta, \quad p = \overline{1, s}, \quad p \neq q$. А, отже, $\forall i \in \sigma_{l_p} \setminus \zeta, \quad p = \overline{1, s}, \quad i \quad \forall t \in \sigma_{l_p} \setminus \zeta, \quad q = \overline{1, s}, \quad q \neq p$ має місце така нерівність

$$\frac{c(x, \tau_i)}{w_i} + a_i \leq \frac{c(x, \tau_t)}{w_t} + a_t \leq \frac{c(x, \tau_i)}{w_i} + a_i,$$

що є можливим, коли $\forall i \in \sigma_{l_p} \setminus \zeta, \quad p = \overline{1, s}, \quad i \quad \forall t \in \sigma_{l_p} \setminus \zeta, \quad q = \overline{1, s}, \quad q \neq p$, має місце (2.16): $c(x, \tau_t)/w_t + a_t = c(x, \tau_i)/w_i + a_i$, що і треба було довести.

Ілюстрація властивості 1 для оптимального дуплексного і триплексного розбиття квадрату із сімома центрами наведена на рис. 2.4 а, б. Функція $c(x, \tau)$ – евклідова метрика, $\rho(x) = 1$ для всіх $x \in \Omega$, $a_i = 0 \quad \forall i$.

Переконаємося у виконанні властивості 2 оптимального розбиття 3-го порядку для квадрату з тими самими центрами (рис. 2.4, в). Нехай точка $x \in \Omega$ – кутова в розбитті, належить границі між зонами: $\Omega_{\{123\}}^*$, $\Omega_{\{237\}}^*$, $\Omega_{\{357\}}^*$, $\Omega_{\{135\}}^*$. Множина $\zeta = \{3\}$ є спільною для всіх наборів індексів, котрі відповідають зазначеним підмножинам 3-го порядку. Центр τ_3 – найближчий до x . Решта центрів з індексами в $\cup_{p=\overline{1, s}} \sigma_{l_p} \setminus \zeta = \{1, 2, 5, 7\}$ лежать на однаковій найкоротшій відстані від точки x (за виключенням відстані між τ_3 та x).

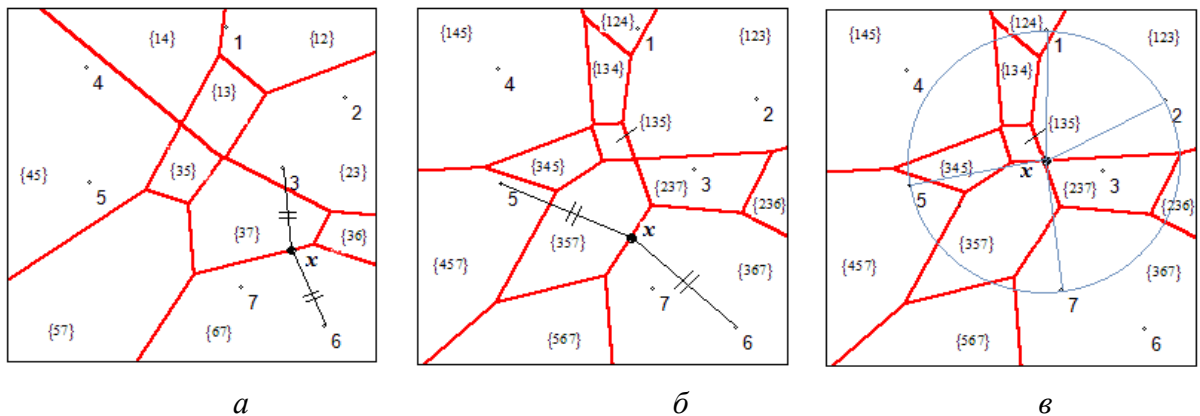


Рис. 2.4. Виконання (2.15) (а, б) і (2.16) (в) для точок границі між зонами

Властивість 3. Нехай в задачі A1-k $c(x, \tau_i)$ – евклідова метрика,

$a_i = 0, w_i = 1, i = \overline{1, N}$; $\rho(x) = \text{const} > 0 \forall x \in \Omega$, тоді оптимальним розбиттям є діаграма Вороного k -го порядку [124, 139]:

$$\bigcup_{i=1}^L \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, L},$$

$$\Omega_m = \{x \in \Omega : \forall j \in T_m \quad c(x, \tau_j) < c(x, \tau_i), \quad i \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus T_m\},$$

де $T_m = \{i_1^m, i_2^m, \dots, i_k^m\}$, $m = \overline{1, L}$, – всілякі k -елементні сукупності множини $\{1, 2, \dots, N\}$.

Так, на рис. 2.5 представлено оптимальне розбиття для задачі **A1-2**, в якій Ω – одиничний квадрат з заданими фіксованими 8-ми центрами; $c(x, \tau_i)$ – евклідова метрика; $a_i = 0, w_i = 1, i = \overline{1, N}$; $\rho(x) = 1 \forall x \in \Omega$. Саме за цих початкових даних формула (2.13) перетвориться на таку:

$$\lambda_{*i}^l(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } c(x, \tau_i) \leq c(x, \tau_j) \text{ одночасно } \forall i \in \sigma_l, j \in N \setminus \sigma_l, \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

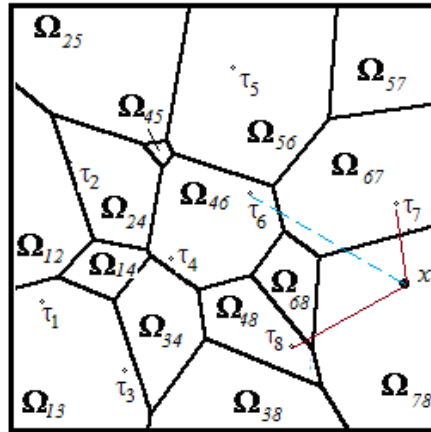


Рис. 2.5. Діаграма Вороного для восьми точок-генераторів, ілюстрація виконання (2.13)

Нехай $x \in \Omega$ – будь-яка фіксована точка. Для $\sigma_q = \{7, 8\}, \sigma_r = \{6, 7\}, \sigma_m = \{6, 8\}$ вектор-функції $\lambda^q(x) = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1\}$, $\lambda_i^r(x) = 0$, $\lambda_i^m(x) = 0$, $i = \overline{1, 2, 8}$, позаяк тільки для $i \in \sigma_q$ виконується нерівність:

$c(x, \tau_i) \leq c(x, \tau_j) \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, 8\} \setminus \sigma_q$. З рис. 2.5 видно, що, наприклад, для набору $\sigma_s = \{3, 7\}$ не знайдеться жодної точки $x \in \Omega$, для якої має місце співвідношення: $c(x, \tau_3) \leq c(x, \tau_j), c(x, \tau_7) \leq c(x, \tau_j) \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, 8\} \setminus \sigma_s$. Тому й виявляється підмножина Ω_{37} порожньою.

Відтак, оптимальними розв'язками задач ОМРМ при певних різних значеннях параметрів критерія якості є зважені адитивно (існує принаймні один $i: a_i \neq 0$), зважені мультиплікативно (існує принаймні один $j: w_j \neq 1, \forall m: w_m \neq 0, m = \overline{1, N}$), зважені адитивно та мультиплікативно (існує одночасно принаймні один i та хоча б один $j: a_i \neq 0, w_j \neq 1, i, j = \overline{1, N}$) діаграми Вороного k -го порядку. У роботі [144] детально освітлено зв'язок між розв'язками задач ОМРМ та кратними діаграмами Вороного.

2.4. Оптимальне розміщення складів аварійного постачання з одночасною сегментація території на зони їх відповідальності. Обмеження на потужності об'єктів відсутні

2.4.1. Задачі оптимального зонування території з розміщенням центрів та її математична постановка

Розглянемо задачу **A1-k**, в якій водночас із зонуванням k -го порядку $\bar{\omega}^* = \{\Omega_{\sigma_1}^*, \Omega_{\sigma_2}^*, \dots, \Omega_{\sigma_L}^*\}$ множини Ω потрібно визначити координати центрів $\tau_i = (\tau_i^1, \tau_i^2), i = \overline{1, N}$. Тоді модель запишеться у новій постановці у вигляді лінійної задачі ОМРМ з розміщенням центрів без обмежень.

$$\text{Задача A2- } k. \quad F(\{\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \dots, \Omega_{\sigma_L}\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}) \rightarrow \min_{\substack{\{\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \dots, \Omega_{\sigma_L}\} \in \Sigma_{\Omega}^{N, k}, \\ \{\tau_1, \dots, \tau_N\} \in \Omega^N}}$$

де

$$\begin{aligned} F(\bar{\omega}, \tau^N) &= F(\{\Omega_{\sigma_1}, \dots, \Omega_{\sigma_L}\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}) = \\ &= \sum_{l=1}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \sum_{i \in \sigma_l} (c(x, \tau_i)/w_i + a_i) \rho(x) dx, \end{aligned} \quad (2.17)$$

з вхідними параметрами та функціями такими самими, що і в задачі **A1-k**, а координати центрів $\tau_1, \dots, \tau_N$ є незаданими.

Пара $(\bar{\omega}^*, \tau_*^N) = (\{\Omega_{\sigma_1}^*, \Omega_{\sigma_2}^*, \dots, \Omega_{\sigma_L}^*\}, \{\tau_1^*, \tau_2^*, \dots, \tau_N^*\})$, за якої функціонал (2.17) досягає свого мінімального значення – **оптимальний розв’язок** задачі **A2-k**.

2.4.2. Необхідні і достатні умови оптимальності. Зведення задачі нескінченновимірної оптимізації до задачі мінімізації функції декількох змінних

Задачу **A2-k** записуємо через характеристичні вектор-функції (2.4) зон Ω_{σ_l} , $l = \overline{1, L}$, що складають розбиття k -го порядку множини Ω .

Задача B1-k. Знайти $\min_{\substack{\lambda(\cdot) \in \Gamma_0^k \\ \tau^N \in \Omega^N}} I(\lambda(\cdot), \tau^N)$, де

$$I(\lambda(\cdot), \tau^N) = \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^N [c(x, \tau_i)/w_i + a_i] \lambda_i^l(x) \rho(x) dx,$$

$$\Gamma_0^k = \{\lambda(\cdot) = (\lambda^1(\cdot), \dots, \lambda^l(\cdot), \dots, \lambda^L(\cdot)): \lambda^l(x) = (\lambda_1^l(x), \dots, \lambda_N^l(x)),$$

$$\lambda_i^l(x) = 0 \vee 1, \quad i = \overline{1, N}, \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i^l(x) = k, \quad l = \overline{1, L}, \quad \text{м.в. для } x \in \Omega\},$$

$$\tau^N \in \Omega^N.$$

Очевидно,

$$\min_{\substack{\lambda(\cdot) \in \Gamma_0^k \\ \tau^N \in \Omega^N}} I(\lambda(\cdot), \tau^N) = \min_{\tau^N \in \Omega^N} \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_0^k} I(\lambda(\cdot), \tau^N). \quad (2.18)$$

Нехай $\rho(x) \geq 0$, $\forall x \in \Omega$. Для кожного фіксованого $\tau^N \in \Omega^N$ внутрішня в (2.18) задача є задачею **B1-k**, лінійність відносно $\lambda(\cdot)$, розв’язність якої

доведено у параграфі 2.3. Її оптимальний розв'язок – вектор-функція $\lambda^*(x) = (\lambda_*^1(x), \dots, \lambda_*^L(x))$ з компонентами $\lambda^l(x)$, $l = \overline{1, L}$, що обчислюються за формулою: м. в. для $x \in \Omega$

$$\lambda_{*i}^l(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } c(x, \tau_i) / w_i + a_i \leq c(x, \tau_j) / w_j + a_j, \\ & \text{одночасно } \forall i \in \sigma_l, j \in N \setminus \sigma_l \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases} \quad l = \overline{1, L}, i = \overline{1, N}.$$

Критерій якості для зовнішньої задачі в (2.18) записується відносно $\tau^N \in \Omega^N$ у такій формі:

$$G(\tau^N) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_0^k} I(\lambda(\cdot), \tau^N) = \int_{\Omega} \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_0^k} \sum_{l=1}^L \left(\sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) / w_i + a_i) \lambda_i^l(x) \right) \rho(x) dx. \quad (2.19)$$

Підставляючи в (2.19) вектор-функцію $\lambda^*(x) = (\lambda_*^1(x), \dots, \lambda_*^L(x))$, яка є розв'язком внутрішньої задачі (2.18), враховуючи виконання умов $\sum_{i=1}^N \lambda_i^l(x) = k, l = \overline{1, L}, i = \overline{1, N}$, конкретизуємо вигляд функції $G(\tau^N)$:

$$G(\tau^N) = \int_{\Omega} \min_{\substack{\sigma_l \in \underline{M}(N, k) \\ l=1, L}} \sum_{i \in \sigma_l} [c(x, \tau_i) / w_i + a_i] \rho(x) dx, \quad \tau^N \in \Omega^N.$$

Для пошуку невідомих координат центрів потрібно розв'язати наступну задачу нелінійного програмування:

$$G(\tau^N) = \int_{\Omega} \min_{\substack{\sigma_l \in \underline{M}(N, k) \\ l=1, L}} \sum_{i \in \sigma_l} [c(x, \tau_i) / w_i + a_i] \rho(x) dx \rightarrow \min_{\tau^N \in \Omega^N}.$$

За попередніми результатами заключаємо, що за фіксованих центрів для задачі **A2-k** є справедливим твердження 2.4. Тому в задачі **B2-k** з функцією $\rho(x) \geq 0, \forall x \in \Omega$, оптимальний розв'язок записується так: для $i = \overline{1, N}, l = \overline{1, L}$ і майже всіх $x \in \Omega$

$$\lambda_{*i}^l(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } c(x, \tau_{*i}) / w_i + a_i \leq c(x, \tau_{*j}) / w_j + a_j, \\ & i \in \sigma_l, j \in N \setminus \sigma_l \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

в якості $\tau_{*1}, \dots, \tau_{*N}$ обирається оптимальний розв'язок задачі:

$$G(\tau^N) \rightarrow \min_{\tau^N \in \Omega^N}, \quad (2.20)$$

де

$$G(\tau^N) = \int_{\Omega} \min_{\substack{\sigma_l \in M(N,k) \\ l=1,L}} \sum_{i \in \sigma_l} [c(x, \tau_i) / w_i + a_i] \rho(x) dx. \quad (2.21)$$

Відтак, неперервна задача ОМРМ зводиться до скінченновимірної задачі (2.20) з недиференційовною функцією (2.21), яка розв'язується за допомогою будь-якого відомого методу негладкої оптимізації [108, 111, 140, 141].

2.4.3. Розробка чисельного алгоритму розв'язання задачі

Далі наведено алгоритм, який розроблений для розв'язання задачі **B2-k** на основі $r(\alpha)$ -алгоритму з адаптивним регулюванням крокового множника, де α – коефіцієнт розтягнення простору [108, 140]. При цьому i -й елемент вектору узагальненого градієнту $g_G(\tau^N) = (g_G^{\tau_1}(\tau^N), \dots, g_G^{\tau_N}(\tau^N))$ функції $G(\tau^N)$ визначається наступним чином:

$$g_G^{\tau_i}(\tau^N) = \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L [g_c^{\tau_i}(x, \tau) / w_i] \lambda_i^l(x) \rho(x) dx, \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.22)$$

де $g_c^{\tau_i}(x, \tau) = (g_c^{\tau_i^1}(x, \tau), g_c^{\tau_i^2}(x, \tau))$ – i -а компонента N -мірного вектору узагальненого градієнту функції $c(x, \tau_i)$ в точці τ^N при фіксованому x .

В алгоритмі, для зручності, вектор τ^N позначається τ . Його верхній індекс відповідатиме номеру поточної ітерації.

Алгоритм 2.2

Ініціалізація. Множину, що зонується, заключити у прямокутник Π , задати $\rho(x) = 0$ для $x \in \Pi \setminus \Omega$. Покрити Π прямокутною сіткою і задати початкове наближення $\tau = \tau^{(0)}$, параметри $\alpha, q_1, q_2, n_h, \varepsilon$ для $r(\alpha)$ -алгоритму.

Крок 1. У вузлах сітки обчислити вектор-функцію $\lambda^{l(0)}(x) = (\lambda_1^{l(0)}(x), \dots, \lambda_N^{l(0)}(x))$, $l = \overline{1, L}$, за формулами (2.13) при $\tau = \tau^{(0)}$.

Обчислити значення функції $G(\tau^{(0)})$ і вектору $g_G(\tau^{(0)})$ за формулами (2.21), (2.22) при $\tau = \tau^{(0)}$, $\lambda^l(x) = \lambda^{l(0)}(x)$, $l = \overline{1, L}$. Задати початковий крок $h_0 > 0$, $B_0^\tau = I_{2N}$ – одиничну квадратну матрицю розміру $2N \times 2N$ і знайти:

$$\tau^{(1)} = P_\Pi(\tau^{(0)} - h_0 g_G(\tau^{(0)})),$$

де P_Π – оператор проектування на Π .

Нехай після $p, p = 1, 2, \dots$ кроків отримано $\tau^{(p)}, \lambda^{l(p)}(x), l = \overline{1, L}$, матрицю B_p^τ .

$(p+1)$ -й крок:

1. Для кожної x обчислити значення $\lambda^{l(p)}(x)$, $l = \overline{1, L}$, за формулами (2.13) при $\tau = \tau^{(p)}$.

2. Обчислити $g_G(\tau^{(p)})$ за формулою (2.22) при $\tau = \tau^{(p)}$, $\lambda^l(x) = \lambda^{l(p)}(x)$, $l = \overline{1, L}$.

3. Обчислити

$$\tau^{(p+1)} = P_\Pi \left(\tau^{(p)} - h_p B_{p+1}^\tau \frac{B_{p+1}^\tau g_G(\tau^{(p)})}{\|B_{p+1}^\tau g_G(\tau^{(p)})\|} \right).$$

Тут B_{p+1}^τ – оператор, що відображує перетворений простір в основний і перераховується у такий спосіб:

$$B_{p+1}^\tau = B_p^\tau + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) B_p^\tau \theta_p^\tau (\theta_p^\tau)^T,$$

де θ_p^τ – нормована різниця двох послідовних узагальнених градієнтів у новому просторі:

$$\theta_p^\tau = \frac{(B_{p+1}^\tau)^T (g_G(\tau^{(p)}) - g_G(\tau^{(p-1)}))}{\|(B_{p+1}^\tau)^T (g_G(\tau^{(p)}) - g_G(\tau^{(p-1)}))\|},$$

коли $\|(B_{p+1}^\tau)^T (g_G^\tau(\tau^{(p)}) - g_G^\tau(\tau^{(p-1)}))\| \geq \varepsilon_0$, та $\theta_p^\tau = 0$ в інших випадках, ε_0 – точність, з якою в ЕОМ представлено машинний нуль. Кроковий множник h_p вибрати за адаптивним регулюванням при заданих параметрах h_0, q_1, q_2, n_h , мінімізуючи різницю $[G(\tau^{(p-1)}) - G(\tau^{(p)})]$ за напрямком вектора $-g_G(\tau)$ у новому просторі.

4. Перевірити виконання умови $\|(\tau^{(p+1)}) - (\tau^{(p)})\| \leq \varepsilon, \varepsilon > 0$. Якщо не виконується, то перехід на $(p+2)$ -го крок з оновленими $\tau^{(p+1)}$ та $\lambda^{l(p)}(x), l = \overline{1, L}$, інакше – перехід до п. 5.

5. Вважати за оптимальний розв’язок $\tau_* = \tau^{(s)}$, $\lambda_*^l(x) = \lambda^{l(s)}(x), l = \overline{1, L}$, де s – номер ітерації закінчення обчислювального процесу.

6. Обчислити значення критерію якості задачі **B2-k** і функції (2.21) при $\tau = \tau_*$, $\lambda^l(\cdot) = \lambda_*^l(\cdot), l = \overline{1, L}$. Відтворити оптимальне розбиття $\bar{\omega}^* = \{\Omega_{\sigma_1}^*, \Omega_{\sigma_2}^*, \dots, \Omega_{\sigma_L}^*\}$, що відповідає функції $\lambda^l(\cdot) = \lambda_*^l(\cdot), l = \overline{1, L}$.

В [111, 141] зазначена доцільність вибору параметрів алгоритму в наступних діапазонах: $\alpha = 2 \div 3$, $h_0 = 1$, $q_1 = 1$, $q_2 = 1.1 \div 1.2$, $n_h = 2 \div 3$. Зменшення кроку з коефіцієнтом q_1 використовується лише тоді, коли умова релаксації за напрямком спуску має місце протягом одного кроку. Величина n_h ($n_h > 1$) визначає кількість ітерацій мінімізації функції однієї змінної, після котрих крок збільшується у q_2 раз.

2.4.4. Експериментальне дослідження властивостей задачі та її оптимальних розв'язків

Усі властивості задач ОМРМ без обмежень з фіксованими центрами з підрозділу 2.3, притаманні й задачі **A2-k**. Наведемо далі особливості, специфічні для оптимальних розв'язків неперервних лінійних задач ОМРМ з невідомими координатами центрів $\tau_i, i = \overline{1, N}$.

Властивість 4. Якщо $\rho(x) = \text{const} > 0, \forall x \in \Omega, c(x, \tau_i)$ – функція евклідової відстані, то оптимальне положення центрів $\tau_i, i = \overline{1, N}$, і відповідне розбиття симетричної множини Ω , також характеризується симетричністю.

Властивість 5. Нехай в задачі ОМРМ з розміщенням центрів без обмежень функція $c(x, \tau_i)$ є евклідовою відстанню, $a_i = 0, w_i = 1, i = \overline{1, N}$, $\rho(x) = 1, \forall x \in \Omega, \Omega$ є симетричною множиною. Тоді задача є багатоекстремальною.

Проявлення останньої властивості можна простежити на рис. 2.6 і 2.7, де подано, за різних початкових наближень центрів, оптимальні розбиття 2-го і 3-го порядків з оптимально розміщеними 15 і 9 центрами відповідно.

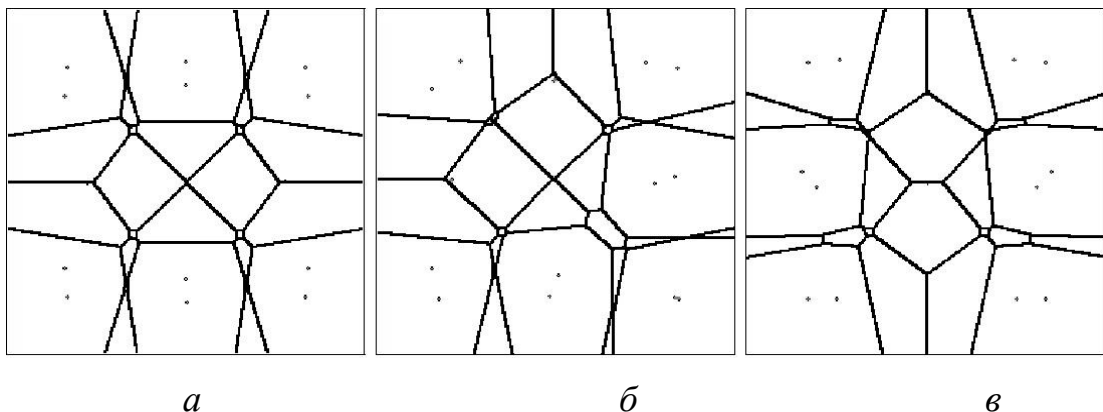


Рис. 2.6. Дуплексні розбиття квадрата з оптимально розміщеними 15-ма центрами

Досягнуті величини критерію оптимальності розбиття наведені в табл. 2.1. Так, у другій задачі, для розв'язків, зображених на рис. 2.7 а і 2.7 б,

значення функціоналу майже однакові (з точністю 0.0001), хоча границі між підмножинами різні, а для розв'язку з рис. 2.7 в – є майже однаковими.

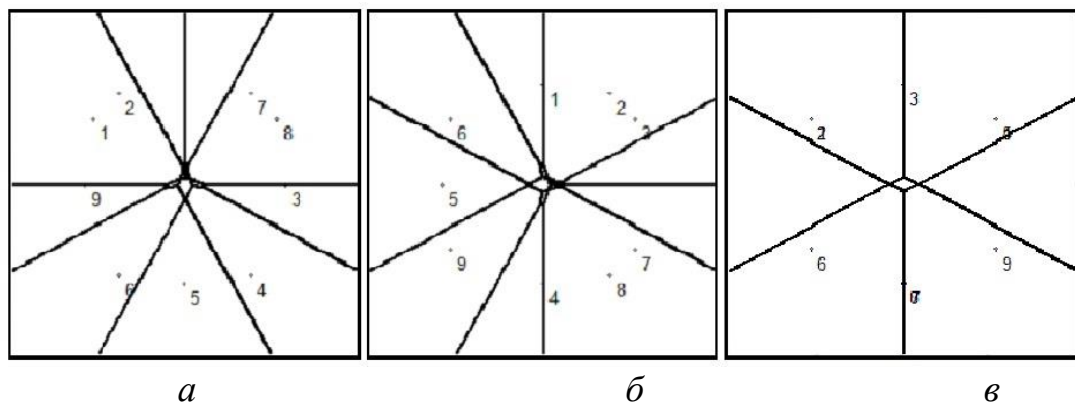


Рис. 2.7. Триплексні розбиття квадрата з оптимально розміщеними 9 центрами

Оптимальне зонування квадрату 2-го і 3-го порядку з фіксованими і розміщеними центрами за таких даних: метрика $c(x, \tau_i)$ – евклідова, $a_i = 0, w_i = 1, i = \overline{1, N}$, $\rho(x) = 1 \forall x \in \Omega$, наведені у табл. 2.2.

Таблиця 2.1

Оптимальні значення функціоналів для результатів зонування з рис. 2.6 і 2.7

N	k	Розбиття на рисунок	Функціонал
15	2	2.6 (а)	284,629
		2.6 (б)	284,209
		2.6 (в)	284,682
9	3	2.7 (а)	706,8348
		2.7 (б)	706,8348
		2.7 (в)	706,842

Таблиця 2.2

Оптимальне мультиплексне розбиття квадрата в задач А1- k і А2- k

Число центрів N	Зонування k -го порядку квадрата Ω		
	Центри фіксовані	З розміщенням центрів	
	$k = 2$	$k = 2$	$k = 3$
15			
12			
11			
8			

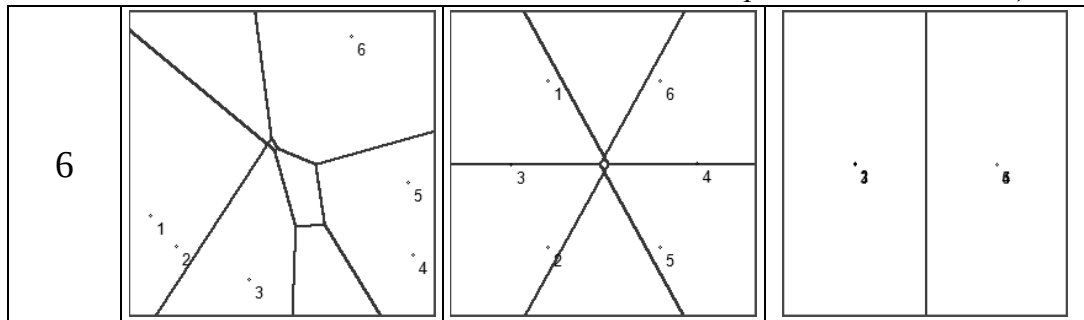


Рис. 2.8 відображує властивість 4 для задачі оптимального зонування 2-го порядку квадрата з розміщенням 7 центрів.

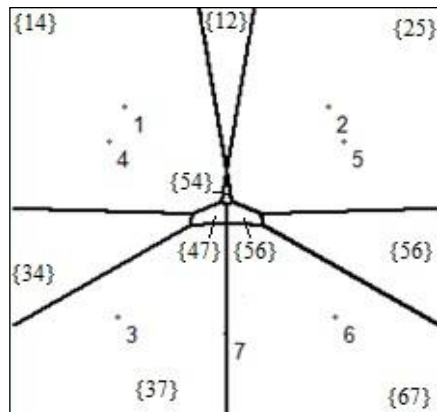


Рис. 2.8. Демонстрація властивості симетрії
оптимального розв'язку задачі A2- k

2.5. Оптимальна сегментація території на зони покриття існуючих складів аварійного постачання за умов їх обмежених потужностей

2.5.1. Математична модель задачі оптимального зонування території для заданих центрів з інтегральними обмеженнями на них

Математичну постановку задачі оптимальної сегментації території на зони для існуючих складів аварійного постачання з урахуванням їх

потужностей сформулюємо як лінійну задачу ОМРМ з обмеженнями у такий спосіб.

$$\begin{aligned}
 \text{Задача АЗ-}k. \quad & F(\{\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \dots, \Omega_{\sigma_L}\}) \rightarrow \min_{\{\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \dots, \Omega_{\sigma_L}\} \in \Sigma_{\Omega}^{N,k}}, \\
 & F(\{\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \dots, \Omega_{\sigma_L}\}) = \sum_{l=1}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \sum_{i \in \sigma_l} (c(x, \tau_i)/w_i + a_i) \rho(x) dx, \quad (2.23) \\
 & \sum_{l: i \in \sigma_l}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x) dx = b_i, i = \overline{1, p}, \\
 & \sum_{l: i \in \sigma_l}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x) dx \leq b_i, i = \overline{p+1, N}, \quad (2.24)
 \end{aligned}$$

де центри $\tau_i \in \text{фіксованими}$, $i = \overline{1, N}$; $c(x, \tau_i), \rho(x), w_i, a_i, b_i, i = \overline{1, N}$ – див. попередній параграф; $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, \dots, j_k^l\}$ – набір індексів центрів $\{\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, \dots, \tau_{j_k^l}\}$, асоційованих із зоною Ω_{σ_l} , $l = \overline{1, L}$. Коефіцієнти γ_i^l відповідають умовам

$$0 \leq \gamma_i^l \leq 1, \quad \gamma_{j_1^l}^l + \gamma_{j_2^l}^l + \dots + \gamma_{j_k^l}^l = 1, \quad i = \overline{1, N}, l = \overline{1, L}. \quad (2.25)$$

Оптимальним розв'язком задачі **АЗ- k** будемо називати розбиття k -го порядку $\bar{\omega}^* = \{\Omega_{\sigma_1}^*, \Omega_{\sigma_2}^*, \dots, \Omega_{\sigma_L}^*\}$, яке задовольняє умови (2.24) і для якого значення функціоналу F є найменшим.

2.5.2. Розв'язність задачі мультиплексного розбиття множини з інтегральними обмеженнями

Введемо до розгляду величину $S = \int_{\Omega} \rho(x) dx$. Нехай $\tau^N \in \Omega^N$ – довільний, але фіксований набір центрів. Просумуємо (2.24) за всіма $i = 1, \dots, N$ і позначимо отриману суму через $\bar{S}$:

$$\bar{S} = \sum_{i=1}^p \sum_{l: i \in \sigma_l}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x) dx + \sum_{i=p+1}^N \sum_{l: i \in \sigma_l}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x) dx =$$

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{l=1 \\ l: i \in \sigma_l}}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x) dx = \sum_{l=1}^L \sum_{\substack{i=1 \\ i: i \in \sigma_l}}^N \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x) dx = \sum_{l=1}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \sum_{\substack{i=1 \\ i: i \in \sigma_l}}^N \gamma_i^l \rho(x) dx.$$

За умов, константи γ_j^l в лівих частинах обмежень такі, що для всіх $j = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, L}$, виконується умова (2.25). Враховуючи її, а також включення $\bar{\omega} = \{\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \dots, \Omega_{\sigma_L}\} \in \Sigma_{\Omega}^{N,k}$ можна записати:

$$\bar{S} = \sum_{l=1}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \sum_{\substack{i=1 \\ i: i \in \sigma_l}}^N \gamma_i^l \rho(x) dx = \sum_{l=1}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \rho(x) dx = \int_{\Omega} \rho(x) dx = S.$$

Просумуємо тепер лише обмеження-рівності у (2.24) і порівняємо отриману суму з S :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p b_i &= \sum_{i=1}^p \sum_{\substack{l=1 \\ l: i \in \sigma_l}}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x) dx \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^p \sum_{\substack{l=1 \\ l: i \in \sigma_l}}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x) dx + \sum_{i=p+1}^N \sum_{\substack{l=1 \\ l: i \in \sigma_l}}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x) dx = S. \end{aligned}$$

Таким чином, аби клас $\Sigma_{\Omega}^{N,k}$ в задачі **A3-k** не був порожнім, достатньо виконання умов:

$$0 \leq b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N; \quad (2.26)$$

$$\sum_{i=1}^p b_i \leq S \leq \sum_{i=1}^N b_i. \quad (2.27)$$

2.5.3. Метод розв'язання задачі на основі теорії двоїстості. Зведення до задачі скінченновимірної оптимізації з недиференційованим критерієм

Задача **A3-k** записується в еквівалентній формі відносно характеристичних вектор-функцій підмножин Ω_{σ_l} , $l = \overline{1, L}$, котрі входять до складу мультиплексного розбиття множини Ω , з координатами

$$\lambda_i^l(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_{\sigma_l} \text{ \& } i \in \sigma_l, \\ 0 & \text{в іншому випадку} \end{cases} \quad i = \overline{1, N}, l = \overline{1, L}, \quad (2.28)$$

де $\sigma_l \in M(N, k)$, $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, \dots, j_k^l\}$ – набір індексів центрів $\{\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, \dots, \tau_{j_k^l}\}$, що асоціюються із зоною Ω_{σ_l} .

Задача В3- k. Знайти $\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma^k} I(\lambda(\cdot))$,

$$I(\lambda(\cdot)) = \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^N [c(x, \tau_i)/w_i + a_i] \lambda_i^l(x) \rho(x) dx,$$

$$\Gamma^k = \left\{ \lambda(\cdot): \lambda(\cdot) \in \Gamma_0^k, \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \gamma_i^l \lambda_i^l(x) \rho(x) dx = b_i, i = \overline{1, p}; \right.$$

$$\left. \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \gamma_i^l \lambda_i^l(x) \rho(x) dx \leq b_i, i = \overline{p+1, N} \right\};$$

$$\Gamma_0^k = \left\{ \lambda(\cdot) = (\lambda^1(\cdot), \dots, \lambda^l(\cdot), \dots, \lambda^L(\cdot)): \lambda^l(x) = (\lambda_1^l(x), \dots, \lambda_N^l(x)), \right.$$

$$\left. \lambda_i^l(x) = 0 \vee 1, i = \overline{1, N}, \sum_{i=1}^N \lambda_i^l(x) = k, l = \overline{1, L}, \text{ м.в. для } x \in \Omega \right\}.$$

Від задачі **В3-k** здійснюється перехід до такої, але зі значеннями $\lambda_i^l(\cdot)$, $i = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, L}$, із відрізка $[0; 1]$. У дискретній оптимізації цей підхід називається LP-релаксацією [11].

Задача С3-k. $\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_2^k} I(\lambda(\cdot))$,

$$\Gamma_2^k = \left\{ \lambda(\cdot): \lambda(\cdot) \in \Gamma_1^k, \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \gamma_i^l \lambda_i^l(x) \rho(x) dx = b_i, i = \overline{1, p}, \right.$$

$$\left. \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \gamma_i^l \lambda_i^l(x) \rho(x) dx \leq b_i, i = \overline{p+1, N} \right\};$$

$$\Gamma_1^k = \left\{ \lambda^l(\cdot) = (\lambda_1^l(\cdot), \dots, \lambda_N^l(\cdot)): 0 \leq \lambda_i^l(x) \leq 1 \text{ для всіх } x \in \Omega, i = \overline{1, N}, \right.$$

$$\left. \sum_{i=1}^N \lambda_i^l(x) = k, l = \overline{1, L}, \text{ п.в. для } x \in \Omega \right\}.$$

Позаяк має місце включення оптимальних розв'язків задачі **В3-k** до множини розв'язків задачі **С3-k**, **В3-k** зводиться до **С3-k** і відбору розв'язків задачі **В3-k**.

Складемо функціонал Лагранжа задачі **С3- k** , враховуючи у ньому інтегральні обмеження:

$$\begin{aligned} W(\lambda(\cdot), \psi) &= \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^N [c(x, \tau_i)/w_i + a_i] \lambda_i^l(x) \rho(x) dx + \\ &+ \sum_{p=1}^N \psi_i \left[\int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \gamma_i^l \lambda_i^l(x) \rho(x) dx - b_i \right] = \\ &= \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i)/w_i + a_i + \gamma_i^l \psi_i) \lambda_i^l(x) \rho(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i. \end{aligned}$$

Функціонал $W(\lambda(\cdot), \psi)$ є визначеним на декартовому добутку $\Gamma_2^k \times \Psi$, де $\Psi = \{\psi \in R^N, \psi_i \geq 0, i = \overline{p+1, N}\}$.

Пара $(\hat{\lambda}(\cdot), \hat{\psi})$ буде складати **сідлову точку** функціоналу Лагранжа $W(\lambda(\cdot), \psi)$ на декартовому добутку $\Gamma_2^k \times \Psi$, якщо $\forall \lambda(\cdot) \in \Gamma_2^k$ і $\forall \psi \in \Psi$ виконуватиметься наступна нерівність:

$$W(\hat{\lambda}(\cdot), \psi) \leq W(\hat{\lambda}(\cdot), \hat{\psi}) \leq W(\lambda(\cdot), \hat{\psi}).$$

Тоді двоїста до задачі **С3- k** задача записується у такий спосіб:

$$H(\psi) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_2^k} W(\lambda(\cdot), \psi) \rightarrow \max_{\psi \in \Psi}. \quad (2.29)$$

Задача (2.29) виявляється скінченновимірною задачею математичного програмування. Розв'язання пари задач **С3- k** і (2.29) є еквівалентним пошуку сідлової точки функціонала Лагранжа $W(\lambda(\cdot), \psi)$ на множині $\Gamma_2^k \times \Psi$.

Конкретизуємо вигляд функції $H(\psi)$, для чого розглянемо задачу

$$W(\lambda(\cdot), \bar{\psi}) \rightarrow \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_2^k}, \quad (2.30)$$

при довільному, але фіксованому векторі $\bar{\psi} \in \Psi$. Задача (2.30), у свою чергу, є задачею ОМРМ без обмежень, записаною відносно характеристичних вектор-функцій зон Ω_{σ_l} , $l = \overline{1, L}$, які утворюють розбиття k -го порядку області Ω . Застосовуючи до (2.30) метод, наведений в параграфі 2.3, оптимальний розв'язок задачі (2.30) можна отримати у наступному вигляді: для $i = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, L}$ та м. в. $x \in \Omega$:

$$\lambda_{*i}^l(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } c(x, \tau_i)/w_i + a_i + \gamma_i^l \bar{\psi}_i \leq c(x, \tau_j)/w_j + a_j + \gamma_j^l \bar{\psi}_j, \\ \text{одночасно } \forall i \in \sigma_l, j \in N \setminus \sigma_l; \\ 0 \text{ в інших випадках,} \end{cases} \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.31)$$

Твердження 2.5. Можливе розбиття $(\Omega_{*\sigma_1}, \dots, \Omega_{*\sigma_N}) \in \Sigma_{\Omega}^{N,k}$ множини Ω буде оптимальним розв'язком задачі **A3-k** тоді і тільки тоді, коли існуватимуть такі дійсні значення параметрів $\psi_1, \dots, \psi_p, \psi_{p+1}, \dots, \psi_N$ (серед яких $\psi_{p+1}, \dots, \psi_N$ – невід'ємні), за яких м.в. для $x \in \Omega$ виконуватимуться нерівності

$$c(x, \tau_i)/w_i + a_i + \gamma_i^l \psi_i \leq c(x, \tau_j)/w_j + a_j + \gamma_j^l \psi_j, \quad i \in \sigma_l, j \in N \setminus \sigma_l. \quad (2.32)$$

З урахуванням (2.31) функціонал задачі (2.29) записується у наступному конкретизованому вигляді:

$$H(\psi) = \int_{\Omega} \min_{\substack{\sigma_l \in M(N,k) \\ l=\overline{1,L}}} \sum_{i \in \sigma_l} [c(x, \tau_i)/w_i + a_i + \gamma_i^l \psi_i] \rho(x) dx.$$

Перша компонента сідлової точки функціоналу Лагранжа задачі **C3-k** на множині $\Gamma_2^k \times \Psi$ визначається для всіх $i = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, L}$ та майже всіх $x \in \Omega$ за формулою:

$$\hat{\lambda}_i^l(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } c(x, \tau_i)/w_i + a_i + \gamma_i^l \hat{\psi}_i \leq c(x, \tau_j)/w_j + a_j + \gamma_j^l \hat{\psi}_j, \\ \forall i \in \sigma_l, j \in N \setminus \sigma_l, \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

Значення множників Лагранжа $\hat{\psi}_1, \dots, \hat{\psi}_N$ розраховуються у процесі розв'язання наступної задачі скінченновимірної умовної оптимізації:

$$V(\psi) \rightarrow \max \quad (2.33)$$

за умов

$$\psi_i \geq 0, \quad i = \overline{p+1, N}, \quad (2.34)$$

де

$$V(\psi) = \int_{\Omega} \min_{\substack{\sigma_l \in M(N,k) \\ l=\overline{1,L}}} \sum_{i \in \sigma_l} [c(x, \tau_i)/w_i + a_i + \gamma_i^l \psi_i] \rho(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i. \quad (2.35)$$

Оскільки серед усіх розв'язків задачі **СЗ- k** обрані лише ті, що є водночас і розв'язками задачі **ВЗ- k** , то справедливим є

Твердження 6. Якщо в задачі **ВЗ- k** функція $\rho(x)$ є невід'ємною на Ω , то компоненти вектору характеристичних функцій, що відповідають оптимальному мультиплексному розбиттю, обчислюються за такою формулою: для всіх $i = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, L}$ та $x \in \Omega$:

$$\lambda_{*i}^l(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } c(x, \tau_i)/w_i + a_i + \gamma_i^l \psi_i^* \leq c(x, \tau_j)/w_j + a_j + \gamma_j^l \psi_j^*, \\ & \forall i \in \sigma_l, j \in N \setminus \sigma_l, \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

де параметри $\psi_1^*, \dots, \psi_N^*$ обираються як оптимальний розв'язок задачі (2.33), (2.34) з недиференційованою цільовою функцією (2.35).

2.5.4. Алгоритм розв'язання задачі з використанням штрафних функцій

Для розробки чисельного алгоритму розв'язання задачі **ВЗ- k** від задачі (2.33), (2.34) здійснюється перехід до задачі безумовної максимізації цільової функції $V(\psi)$, розширеної за допомогою негладкої штрафної функції множини $\{\psi_i \geq 0, i = \overline{m+1, N}\}$, тобто розв'язується наступна задача:

$$\max_{\psi \in E_N} P(\psi),$$

де $P(\psi) = V(\psi) - Q \sum_{i=p+1}^N \max(0, -\psi_i)$, а Q – велике додатне число (значно більше за множники Лагранжа). Замість τ^N будемо використовувати позначення τ .

Вектор узагальненого псевдоградієнту функції $P(\psi)$ складається з N компонент, i -та з яких в точці $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N)$ визначається наступним чином:

$$-g_P^\psi(\psi^q) = (-g_P^{\psi_1}(\psi), \dots, -g_P^{\psi_N}(\psi)), \text{ де}$$

$$g_P^{\psi_i}(\psi) = \begin{cases} \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \gamma_i^l \lambda_i^l(x) \rho(x) dx - b_i, & i = \overline{1, m}, \\ \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \gamma_i^l \lambda_i^l(x) \rho(x) dx - b_i + Q \max(0, \text{sign}(-\psi_i)), & i = \overline{m+1, N}. \end{cases} \quad (2.36)$$

В формулах (2.36) $\lambda_i^l(x)$, $i = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, L}$, визначається відповідно до виразу (2.28) наступним чином:

$$\lambda_i^l(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } c(x, \tau_i) / w_i + a_i + \gamma_i^l \psi_i \leq c(x, \tau_j) / w_j + a_j + \gamma_j^l \psi_j, \\ & \forall i \in \sigma_l, j \in N \setminus \sigma_l, \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Алгоритм 2.3

Ініціалізація. Область Ω заключити у прямокутник Π , вважати $\rho(x) = 0$ для $x \in \Pi \setminus \Omega$. Множину Π покрити прямокутною сіткою. Задати початкове наближення $\psi = \psi^{(0)}$, параметри $\alpha, q_1, q_2, n_h, \varepsilon$ $r(\alpha)$ -алгоритму.

Крок 1. Обчислити вектор-функції $\lambda^{l(0)}(x) = (\lambda_1^{l(0)}(x), \dots, \lambda_N^{l(0)}(x))$, $l = \overline{1, L}$, у вузлах сітки за формулами (2.28) при $\psi = \psi^{(0)}$. Обчислити значення функції $V(\psi^{(0)})$ і вектора $g_P^{\psi}(\psi^{(0)})$ за формулами (2.35), (2.36) при $\psi = \psi^{(0)}$, $\lambda^l(x) = \lambda^{l(0)}(x)$, $l = \overline{1, L}$, $x \in \Omega$.

Задати початковий крок $h_0 > 0$, $B_0^{\psi} = I_N$ – одиничну матрицю розміру $N \times N$ і знайти:

$$\psi^1 = \psi^0 - h_0 \frac{g_P^{\psi}(\psi^0)}{\|g_P^{\psi}(\psi^0)\|}.$$

Нехай після $q, q = 1, 2, \dots$ кроків отримано ψ^q , $\lambda^{l(q-1)}(x)$, $l = \overline{1, L}$, у вузлах сітки, матриця B_q^{ψ} .

$(q+1)$ -а ітерація.

1. Обчислити $\lambda^{l(q)}(x)$, $l = \overline{1, L}$, згідно (2.28) при $\psi = \psi^{(q)}$.

2. Обчислити $g_p^\psi(\psi^q)$ за формулами (2.36) при $\psi = \psi^{(q)}$, $\lambda^l(x) = \lambda^{l(q)}(x)$, $l = \overline{1, L}$.

3. Перерахувати матрицю B_{q+1}^ψ за формулою

$$B_{q+1}^\psi = B_q^\psi + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) B_q^\psi \theta_q^\psi (\theta_q^\psi)^T,$$

θ_q^ψ – нормований вектор, визначається за формулою:

$$\theta_q^\psi = \frac{(B_{q+1}^\psi)^T (g_p^\psi(\psi^q) - g_p^\psi(\psi^{q-1}))}{\left\| (B_{q+1}^\psi)^T (g_p^\psi(\psi^q) - g_p^\psi(\psi^{q-1})) \right\|},$$

за умов, що $\left\| (B_{q+1}^\psi)^T (g_p^\psi(\psi^q) - g_p^\psi(\psi^{q-1})) \right\| \geq \varepsilon_0$, і $\theta_q^\psi = 0$ в протилежному випадку (ε_0 – точність, з якою в ЕОМ представляється машинний нуль).

4. Знайти кроковий множник h_q , адаптивним регулюванням з параметрами збільшення і зменшення h_0, q_1, q_2, n_h з умови мінімуму різниці $(V(\psi^q) - V(\psi^{q-1}))$ у напрямку $-g_p^\psi(\psi^q)$ у новому просторі.

5. Обчислити наступне наближення вектору ψ :

$$\psi^{q+1} = \psi^q - h_q B_{q+1}^\psi \frac{(B_{q+1}^\psi)^T g_p^\psi(\psi^q)}{\left\| (B_{q+1}^\psi)^T g_p^\psi(\psi^q) \right\|}.$$

4. Якщо не виконується умова $\|\psi^{q+1} - \psi^q\| \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, то – перехід до $(p+2)$ -го кроку з новими ψ^{q+1} , $\lambda^{l(q)}(x)$, $l = \overline{1, L}$, у вузлах сітки, у протилежному випадку – перехід до п. 5.

5. Вважати $\psi^* = \psi^{(l)}$, $\lambda_*^l(x) = \lambda^{l(s)}(x)$, $l = \overline{1, L}$, де s – номер ітерації, коли стала справедливою умова закінчення ітераційного процесу.

6. Обчислити значення критерію якості задачі **B-k** та функції (2.35), коли $\psi = \psi^*$, $\lambda^l(\cdot) = \lambda_*^l(\cdot)$, $l = \overline{1, L}$. Відновити відповідне розбиття множини.

Кінець алгоритму.

Описаний алгоритм має таку саму обчислювальну складність, що й алгоритм 2.2 з параграфу 2.4.3.

2.5.5. Приклади оптимального зонування областей за умови обмежених потужностей центрів

Простежимо суттєвий вплив обмеженої потужності центру на зону його дії на модельних прикладах.

На рис. 2.9, *а* зображене оптимальне дулексне зонування, яке виявилось розв'язком задачі **A3-k** за таких вихідних даних:

$$\Omega = \{x \in R^2: 0 \leq x_i \leq 10, i = 1,2\},$$

$$N = p = 7, k = 2, L = C_7^2 = 21,$$

$$c(x, \tau_i) = \sqrt{(x_1 - \tau_1^i)^2 + (x_2 - \tau_2^i)^2}; \rho(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega;$$

$$w_i = 1, a_i = 0, \forall i = \overline{1, N}; b = (3; 100; 10; 100; 100; 10; 0.9);$$

$$\gamma_j^l = b_j / \sum_{q: q \in \sigma_l} b_q \quad \forall j = \overline{1, N}, l = \overline{1, L}.$$

Для порівняння на рис. 2.9, *б* наведено оптимальне зонування Ω за відсутності інтегральних обмежень.

Як слід очікувати, оптимальне значення функціоналу мультиплексного розбиття з інтегральними обмеженнями у порівнянні із задачею без них збільшилося з 301.112 до 409.609 за рахунок того, що деякі території підпорядковуються не до самих найближчих центрів, а отже, вартість обслуговування мешканців цих територій зростає.

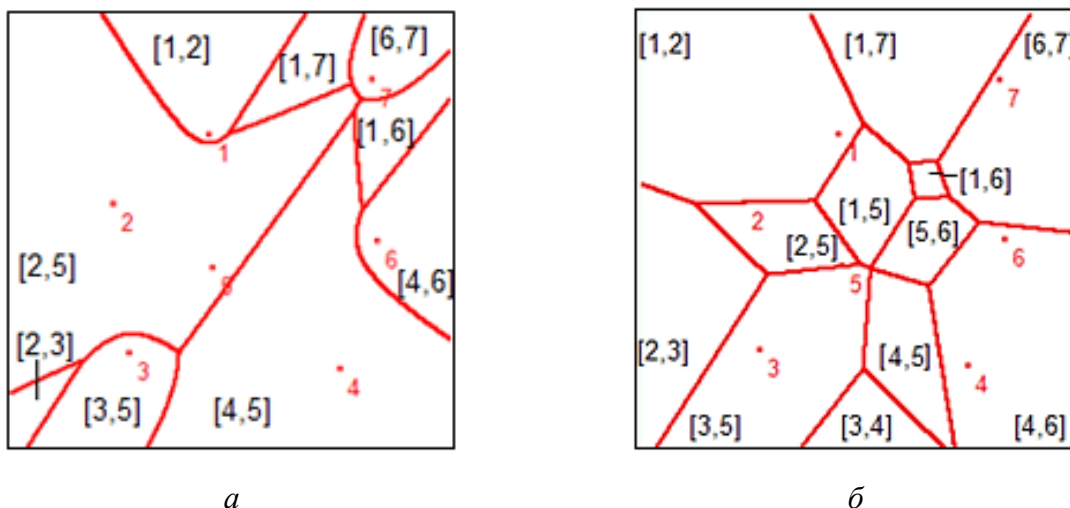


Рис. 2.9. Оптимальне розбиття квадрата 2-го порядку:
a – при інтегральних обмеженнях; *б* – без інтегральних обмежень

Вплив величини потужності центру як на зону його впливу, так і взагалі на мультиплексного розбиття, ілюструє табл. 2.3.

У першому рядку таблиці представлені отримані в задачі **A3-*k*** мультиплексні розбиття квадрату для восьми заданих центрів, причому їхні потужності є однаковими та настільки великими, що вважаються необмеженими.

Другий рядок таблиці відповідає випадку, коли деякі центри мають на порядок меншу за інші потужність.

Аби відстежити зміну зони, на якій діє той чи інший центр, в залежності від кратності розбиття та обмежених потужностей центрів, на розбитті зафарбовано таку зону для центру τ_1 .

Слід зазначити, що величини b_i , $i = \overline{1, N}$, задані так, аби для $k = 1, 2, 3$ виконувалися умови (2.26) – (2.27) розв'язності задачі ОМРМ.

Таблиця 2.3

Вплив обмежень на потужність центрів на границі мультиплексного розбиття

№	Вихідні дані: N, b, a, w	Оптимальне розбиття k -го порядку. Зона обслуговування для першого центру		
		$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
1	$N = 10,$ $a_{1,3,5,7,9} = 1;$ $a_{2,4,6,8,10} = 2,$ $b_i = 100, \forall i = \overline{1,10},$ $w_i = 1, \forall i = \overline{1,10}$			
2	$N = 10,$ $a_{1,3,5,7,9} = 1;$ $a_{2,4,6,8,10} = 2;$ $b_{1,4} = 10;$ $b_3 = 3;$ $b_{2,5,6,7,8,9,10} = 100;$ $w_i = 1, \forall i = \overline{1,10}$			

2.6. Оптимальне розміщення складів аварійного постачання з одночасною сегментацією регіону на зони їх впливу за умов наявності обмежень на потужності об'єктів

2.6.1. Математична модель – неперервна лінійна задача оптимального мультиплексного розбиття множини з розміщенням центрів і обмеженнями на їх потужності

Задача А- k . Потрібно

$$F(\bar{\omega}, \tau^N) \rightarrow \min_{\substack{\bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^{N,k}, \\ \tau^N \in \Omega^N}},$$

$$F(\bar{\omega}, \tau^N) = \sum_{l=1}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \sum_{i \in \sigma_l} (c(x, \tau_i)/w_i + a_i) \rho(x) dx,$$

$$\sum_{l: i \in \sigma_l}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x) dx = b_i, \quad i = \overline{1, p}, \quad (2.37)$$

$$\sum_{l: i \in \sigma_l}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{p+1, N}. \quad (2.38)$$

Тут всі функції і параметри задовольняють таким самим умовам, як і у попередніх задачах.

Для задачі **A-k** оптимальним розв'язком є допустима (задовольняє умови (2.37), (2.38)) пара $(\bar{\omega}^*, \tau^{N*})$, за якої функціонал F досягає свого мінімального значення.

Для коректності поставленої задачі **A-k** для правих частин обмежень (2.37), (2.38) мають виконуватися наступні умови:

$$0 \leq b_i \leq S, \quad i = \overline{1, N}; \quad \sum_{i=1}^p b_i \leq S \leq \sum_{i=1}^N b_i,$$

де $S = \int_{\Omega} \rho(x) dx$. У такому випадку клас допустимих розбиттів задачі не є порожнім. Довести достатність зазначених умов можна аналогічно викладкам підрозділу 2.4.

2.6.2. Особливості методу розв'язання задачі

Вихідна задача **A-k** формулюється в еквівалентному вигляді як задача нескінченновимірною математичного програмування з булевими змінними і записується ЛП-релаксація останньої:

Задача B-k. Знайти

$$\begin{aligned} & \min_{(\lambda(\cdot), \tau^N) \in \Gamma^k \times \Omega^N} I(\lambda(\cdot), \tau^N), \\ & I(\lambda(\cdot), \tau^N) = \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^N \left[\frac{c(x, \tau_i)}{w_i} + a_i \right] \lambda_i^l(x) \rho(x) dx, \\ & \Gamma^k = \{ \lambda(\cdot) : \lambda(\cdot) \in \Gamma_0^k, \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \gamma_i^l \lambda_i^l(x) \rho(x) dx = b_i, \quad i = \overline{1, p}; \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \gamma_i^l \lambda_i^l(x) \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{p+1, N};$$

$$\Gamma_0^k = \left\{ \lambda(\cdot) = (\lambda^1(\cdot), \dots, \lambda^l(\cdot), \dots, \lambda^L(\cdot)): \lambda^l(x) = (\lambda_1^l(x), \dots, \lambda_N^l(x)), \right.$$

$$\left. \lambda_i^l(x) = 0 \forall 1, i = \overline{1, N}, \sum_{i=1}^N \lambda_i^l(x) = k, \quad l = \overline{1, L}, \text{ м.в. для } x \in \Omega \right\}.$$

Задача С- k .

$$\min_{(\lambda(\cdot), \tau^N) \in \Gamma_2^k \times \Omega^N} I(\lambda(\cdot), \tau^N),$$

$$\Gamma_2^k = \left\{ \lambda(\cdot): \lambda(\cdot) \in \Gamma_1^k, \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \gamma_i^l \lambda_i^l(x) \rho(x) dx = b_i, \quad i = \overline{1, p}, \right.$$

$$\left. \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \gamma_i^l \lambda_i^l(x) \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{p+1, N} \right\};$$

$$\Gamma_1^k = \left\{ \lambda^l(\cdot) = (\lambda_1^l(\cdot), \dots, \lambda_N^l(\cdot)): 0 \leq \lambda_i^l(x) \leq 1 \text{ для всіх } x \in \Omega, \quad i = \overline{1, N}, \right.$$

$$\left. l = \overline{1, L}, \sum_{i=1}^N \lambda_i^l(x) = k, \quad l = \overline{1, L}, \text{ м.в. для } x \in \Omega \right\}.$$

Далі розв'язується задача **С- k** і з усіх її оптимальних розв'язків відбираються розв'язки **В- k** .

Функціонал Лагранжа для задачі **С- k**

$$\begin{aligned} W((\lambda(\cdot), \tau^N), \psi) &= \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^N [c(x, \tau_i)/w_i + a_i] \lambda_i^l(x) \rho(x) dx + \\ &+ \sum_{p=1}^N \psi_i \left[\int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \gamma_i^l \lambda_i^l(x) \rho(x) dx - b_i \right] = \\ &= \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i)/w_i + a_i + \gamma_i^l \psi_i) \lambda_i^l(x) \rho(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i \end{aligned}$$

який визначено на $(\Gamma_2^k \times \Omega^N) \times \Psi$, де $\Psi = \{\psi \in R^N, \psi_i \geq 0, i = \overline{p+1, N}\}$.

Пара $((\hat{\lambda}(\cdot), \hat{\tau}^N), \hat{\psi})$ називається сідловою точкою функціонала Лагранжа $W((\lambda(\cdot), \tau^N), \psi)$ на множині $(\Gamma_2^k \times \Omega^N) \times \Psi$, якщо $\forall (\lambda(\cdot), \tau^N) \in \Gamma_2^k \times \Omega^N$ і $\forall \psi \in \Psi$ виконується наступна нерівність:

$$W((\hat{\lambda}(\cdot), \hat{\tau}^N), \psi) \leq W((\hat{\lambda}(\cdot), \hat{\tau}^N), \hat{\psi}) \leq W((\lambda(\cdot), \tau^N), \hat{\psi}).$$

Задача, яка є двоїстою до **C-k**, запишеться у наступному вигляді:

$$H(\psi) = \min_{(\lambda(\cdot), \tau^N) \in \Gamma_2^k \times \Omega^N} W((\lambda(\cdot), \tau^N), \psi) \rightarrow \max_{\psi \in \Psi}. \quad (2.39)$$

Задача (2.39) є, на відміну від **C-k**, скінченновимірною. Обидві задовольняють умову: $I_* = H^*$, і при цьому буде досяжною верхня грань у двоїстій задачі, тоді і тільки тоді, коли існуватиме сідлова точка для $W((\lambda(\cdot), \tau^N), \psi)$ в сенсі введеного визначення.

Будемо шукати сідлову точку функціоналу Лагранжа $W((\lambda(\cdot), \tau^N), \psi)$ на множині $(\Gamma_2^k \times \Omega^N) \times \Psi$.

Виберемо довільний вектор $\bar{\psi} \in \Psi$ і розглянемо задачу

$$W((\lambda(\cdot), \tau^N), \bar{\psi}) \rightarrow \min_{(\lambda(\cdot), \tau^N) \in \Gamma_2^k \times \Omega^N}. \quad (2.40)$$

Задача (2.40) – задача ОМРМ з розміщенням центрів без обмежень, записана відносно характеристичних вектор-функцій зон Ω_{σ_l} , $l = \overline{1, L}$, котрі утворюють мультиплексне розбиття множини Ω .

Скориставшись методом розв'язання з підрозділу 2.4, розв'язок задачі (2.40) запишеться у такому вигляді: для $i = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, L}$ і м. в. $x \in \Omega$:

$$\lambda_{*i}^l(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } c(x, \tau_{*i})/w_i + a_i + \gamma_i^l \bar{\psi}_i \leq c(x, \tau_{*j})/w_j + a_j + \gamma_j^l \bar{\psi}_j, \\ \text{одночасно } \forall i \in \sigma_l, j \in N \setminus \sigma_l; \\ 0 \text{ в протилежному випадку,} \end{cases} \quad i = \overline{1, N}; \quad (2.41)$$

де $\tau_{*m+1}, \dots, \tau_{*N}$ – оптимальний розв'язок наступної задачі

$$G(\tau^N, \bar{\psi}) \rightarrow \min_{\tau^N \in \Omega^N}, \quad (2.42)$$

$$G(\tau^N, \bar{\psi}) = \int_{\Omega} \min_{\substack{\sigma_l \in M(N, k) \\ l = \overline{1, L}}} \sum_{i \in \sigma_l} [c(x, \tau_i)/w_i + a_i + \gamma_i^l \bar{\psi}_i] \rho(x) dx. \quad (2.43)$$

Відтак, в задачі **A-k** для фіксованого $\tau^N \in \Omega^N$ допустиме зонування $(\Omega_{*\sigma_1}, \dots, \Omega_{*\sigma_l}, \dots, \Omega_{*\sigma_N}) \in \Sigma_{\Omega}^N$ множини Ω буде оптимальним тоді і тільки тоді,

коли існуватимуть такі константи $\psi_1, \dots, \psi_p, \psi_{p+1}, \dots, \psi_N$ ($\psi_{p+1}, \dots, \psi_N$ – невід’ємні), що м. в. для $x \in \Omega$

$$c(x, \tau_i)/w_i + a_i + \gamma_i^l \psi_i \leq c(x, \tau_j)/w_j + a_j + \gamma_j^l \psi_j, \quad i \in \sigma_l, \quad j \in N \setminus \sigma_l. \quad (2.44)$$

Враховуючи (2.41) – (2.43), функціонал задачі (2.39) записується у наступному уточненому вигляді:

$$H(\psi) = \min_{\tau^N \in \Omega^N} \int_{\Omega} \min_{\substack{\sigma_l \in M(N, k) \\ l = \overline{1, L}}} \sum_{i \in \sigma_l} [c(x, \tau_i)/w_i + a_i + \gamma_i^l \psi_i] \rho(x) dx.$$

Компоненти сідлової точки функціонала Лагранжа задачі **C-k** на множині $(\Gamma_2^k \times \Omega^N) \times \Psi$ обчислюються у такий спосіб: для всіх $i = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, L}$ і майже всіх $x \in \Omega$ так:

$$\hat{\lambda}_i^l(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } c(x, \hat{\tau}_i)/w_i + a_i + \gamma_i^l \hat{\psi}_i \leq c(x, \hat{\tau}_j)/w_j + a_j + \gamma_j^l \hat{\psi}_j, \\ & \forall i \in \sigma_l, \quad j \in N \setminus \sigma_l, \\ 0 & \text{в протилежному випадку,} \end{cases}$$

де параметри $\hat{\tau}_{m+1}, \dots, \hat{\tau}_N, \hat{\psi}_1, \dots, \hat{\psi}_N$ знаходяться в результаті розв’язування наступної задачі:

$$G(\psi) = \min_{\tau^N \in \Omega^N} G_1(\tau, \psi) \rightarrow \max, \quad (2.45)$$

за умов

$$\psi_i \geq 0, \quad i = \overline{p+1, N}, \quad (2.46)$$

$$G_1(\tau^N, \psi) = \int_{\Omega} \min_{\substack{\sigma_l \in M(N, k) \\ l = \overline{1, L}}} \sum_{i \in \sigma_l} \left[\frac{c(x, \tau_i)}{w_i} + a_i + \gamma_i^l \psi_i \right] \rho(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i. \quad (2.47)$$

З усіх розв’язків задачі **C-k** просіюються розв’язки **B-k**. Відтак, розв’язок задачі **B-k** записується у такий спосіб:

для $i = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, L}$ і майже всіх $x \in \Omega$:

$$\lambda_{*i}^l(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } c(x, \tau_{*i})/w_i + a_i + \gamma_i^l \psi_i^* \leq c(x, \tau_{*j})/w_j + a_j + \gamma_j^l \psi_j^*, \\ & \forall i \in \sigma_l, \quad j \in N \setminus \sigma_l, \\ 0 & \text{в протилежному випадку,} \end{cases}$$

з оптимальним розв’язком $\tau_{*m+1}, \dots, \tau_{*N}, \psi_1^*, \dots, \psi_N^*$ задачі (2.45), (2.46).

2.6.3. Наближений алгоритм розв'язання задачі оптимального зонування території при обмеженнях і результати обчислювальних експериментів

Задачу (2.45), (2.46) записуємо у вигляді:

$$\max_{\psi \in E^N} \min_{\tau^N \in \Omega^N} U(\tau^N, \psi),$$

де $U(\tau^N, \psi) = G_1(\tau^N, \psi) - Q \sum_{i=p+1}^N \max(0, -\psi_i)$, Q – константа, яка є на декілька порядків більшою за множники Лагранжа. Далі вектор τ^N будемо позначати τ . Нехай вектор

$$\begin{aligned} g_U(\tau, \psi) &= (g_U^\tau(\tau, \psi), -g_U^\psi(\tau, \psi)) = \\ &= (g_U^{\tau_1}(\tau, \psi), \dots, g_U^{\tau_N}(\tau, \psi), -g_U^{\psi_1}(\tau, \psi), \dots, -g_U^{\psi_N}(\tau, \psi)) \end{aligned}$$

– є узагальненим псевдоградієнтом функції $U(\tau^N, \psi)$ у точці $(\tau, \psi) = (\tau_1, \dots, \tau_N, \psi_1, \dots, \psi_N)$. Його компоненти обчислюються за формулами:

$$g_U^{\tau_i}(\tau, \psi) = \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \left[\frac{g_c^{\tau_i}(x, \tau)}{w_i} \right] \lambda_i^l(x) \rho(x) dx, \quad i = \overline{1, N}; \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} g_U^{\psi_i}(\tau, \psi) &= \\ &= \begin{cases} \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \gamma_i^l \lambda_i^l(x) \rho(x) dx - b_i, & i = \overline{1, p}, \\ \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \gamma_i^l \lambda_i^l(x) \rho(x) dx - b_i + Q \max(0, \text{sign}(-\psi_i)), & i = \overline{p+1, N}, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.50)$$

де $g_c^{\tau_i}(x, \tau)$ – i -а компонента узагальненого градієнту $g_c^\tau(x, \tau)$ функції $c(x, \tau_i)$ в точці $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$ при фіксованому x . При цьому $\lambda_i^l(x)$, $i = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, L}$, обчислюються так:

$$\lambda_i^l(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c(x, \tau_i)/w_i + a_i + \gamma_i^l \psi_i \leq c(x, \tau_j)/w_j + a_j + \gamma_j^l \psi_j, \\ & \forall i \in \sigma_l, j \in N \setminus \sigma_l, \\ 0 & \text{у противному випадку.} \end{cases} \quad (2.51)$$

Для зручності в наведеному нижче алгоритмі пару (τ, ψ) об'єднаємо в один вектор і будемо використовувати таке позначення $w = (\tau, \psi)$.

Алгоритм 2.4.

Ініціалізація. Область Ω заключити в прямокутник Π , $\rho(x) = 0$ для $x \in \Pi \setminus \Omega$. Π покрити прямокутною сіткою, задати початкове наближення $w^{(0)} = (\tau^{(0)}, \psi^{(0)})$, параметри $\alpha, q_1, q_2, n_h, \varepsilon$ модифікації $r(\alpha)$ -алгоритму.

Крок 1. Обчислити у вузлах сітки $\lambda^{l(0)}(x) = (\lambda_1^{l(0)}(x), \dots, \lambda_N^{l(0)}(x))$, $l = \overline{1, L}$ при $\tau = \tau^{(0)}$, $\psi = \psi^{(0)}$; значення $G_1(\tau^{(0)}, \psi^{(0)})$ і вектор $g_U(w^{(0)}) = g_U(\tau^{(0)}, \psi^{(0)})$.

Вибрати початковий крок $h_0 > 0$, задати $B_0^w = I_{3N}$, – одинична матриця $3N \times 3N$ і знайти:

$$w^{(1)} = w^{(0)} - h_0 g_U^w(w^{(0)}).$$

Якщо перша складова вектору $w^{(1)}$ – точка $\tau^{(1)}$ не належить множині Π , то знаходимо проєкцію цієї точки на прямокутник: $\tau^{(1)} := P_\Pi(\tau^{(1)})$.

Нехай за m , $m = 1, 2, \dots$ кроків отримано $\tau^{(m)}, \psi^{(m)}, \lambda^{l(m-1)}(x)$, $l = \overline{1, L}$, у вузлах сітки, матрицю $B_m^{w^{(1)}}$.

(m+1)-й крок:

1. Обчислити $\lambda^{l(m)}(x)$, $l = \overline{1, L}$, за формулою (2.51) при $\tau = \tau^{(m)}$, $\psi = \psi^{(m)}$.

2. Обчислити $g_U(\tau^{(m)}, \psi^{(m)})$ у вузлах сітки при $\tau = \tau^{(m)}$, $\psi = \psi^{(m)}$, $\lambda^l(x) = \lambda^{l(m)}(x)$, $l = \overline{1, L}$, за формулами (2.49), (2.50).

3. Здійснити поточну ітерацію $r(\alpha)$ -алгоритму за формулою

$$w^{(m+1)} = w^{(m)} - h_m B_{m+1}^w \frac{(B_{m+1}^w)^T g_U^w(w^{(m)})}{\|(B_{m+1}^w)^T g_U^w(w^{(m)})\|}.$$

Оператор просторового відображення $B_{m+1}^w = B_m^w \left(I + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \theta_m^w (\theta_m^w)^T \right)$, I – одинична матриця, θ_m^w – нормований вектор, розраховується за наступною формулою:

$$\theta_m^w = \frac{(B_{m+1}^w)^T (g_U^w(w^{(m)}) - g_U^w(w^{(m)}))}{\|(B_{m+1}^w)^T (g_U^w(w^{(m)}) - g_U^w(w^{(m)}))\|},$$

за умови $\|(B_{m+1}^w)^T (g_U^w(w^{(m)}) - g_U^w(w^{(m)}))\| \geq \varepsilon_0$, і $\theta_m^w = 0$ в решті випадків. Множник h_m вибирається адаптивним способом (див. попередній алгоритм) за мінімальної різниці $[U(\tau^{(m)}, \psi^{(m-1)}) - U(\tau^{(m-1)}, \psi^{(m)})]$.

$$4. \tau^{(m)} := P_{\Pi}(\tau^{(m)}).$$

5. Якщо нерівність $\|(\tau^{(m+1)}, \psi^{(m+1)}) - (\tau^{(m)}, \psi^{(m)})\| \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, не виконується, то – перехід до $(m + 2)$ -го кроку із оновленими $\tau^{(m+1)}$, $\psi^{(m+1)}$, $\lambda^{l(m)}(x)$, $l = \overline{1, L}$, у вузлах сітки, у протилежному випадку – перехід до п. 6.

6. Покласти $\tau_* = \tau^{(s)}$, $\psi^* = \psi^{(s)}$, $\lambda_*^l(x) = \lambda^{l(s)}(x)$, $l = \overline{1, L}$, де s – номер ітерації закінчення розрахункового процесу.

7. Обчислити оптимальне значення критерія якості задачі **B-k** та функції (2.43) при $\tau = \tau_*$, $\psi = \psi^*$, $\lambda^l(\cdot) = \lambda_*^l(\cdot)$, $l = \overline{1, L}$.

Кінець алгоритму.

Усі алгоритми, наведені у розділі, реалізовані та включені до комплексу програм "OPTIMAL MULTIPLEX-PARTITIONING OF SETS" (OMPS-2015) [142]. Обмеження на двоїсті змінні і умови приналежності центрів до заданої множини в задачі (2.46) – (2.48) враховуються, застосовуючи апарат штрафних функцій або за допомогою оператора проєктування [143]. Задачі скінченновимірної безумовної оптимізації розв'язуються за допомогою методу узагальненого градієнту (псевдоградієнту) з розтягненням простору в напрямку різниці двох послідовних узагальнених градієнтів (або псевдоградієнтів) [140, 141].

Далі представлено результати обчислювальних експериментів з розв’язання декількох модельних прикладів оптимального зонування регіону Ω для проведення невідкладних відновлювальних робіт із запобігання і ліквідації наслідків НС спеціалізованими службами ЦЗ, котрі або вже функціонують, або їх потрібно розмістити. При цьому: 1) густота населення регіону може бути різною в різних частинах Ω ; 2) масштаб і кількість заходів щодо захисту населення та територій від техногенних надзвичайних ситуацій визначаються згідно принципу необхідної достатності та максимального користування наявними силами та засобами; 3) допускається перекриття зон до k -го порядку.

Задача 1. Вхідні дані: $\Omega = \{(x^1, x^2) \in R^2: 0 \leq x^i \leq 10, i = 1, 2\}$, $k = 2$, $N = 11$, інша інформація про вигляд функцій, що описують густину населення, транспортні та організаційні витрати, а також обмежену потужність центрів, наведено в табл. 2.4 у першому стовпчику.

В першому рядку таблиці містяться результати зонування Ω для існуючих служб з однаковими потужностями, аби кожна з них була в змозі обслуговувати досить велику територію. У другому рядку представлено зонування для тих самих центрів, але у випадку, коли потужність одного з них достатньо мала.

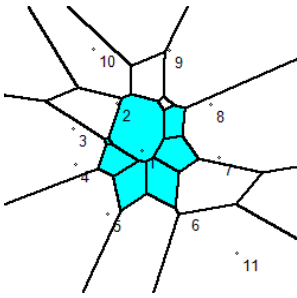
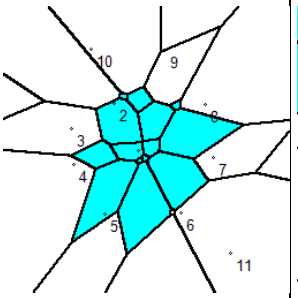
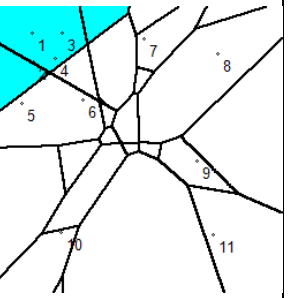
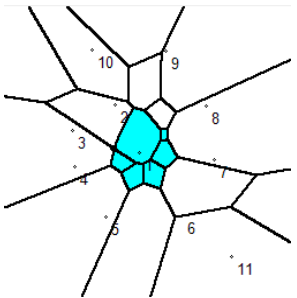
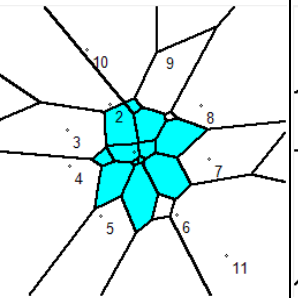
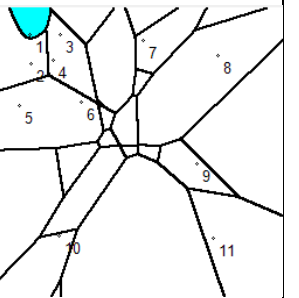
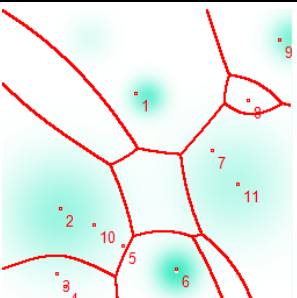
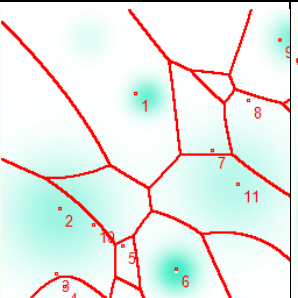
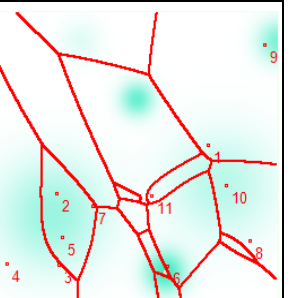
З метою простеження зміни області дії однієї служби в залежності від кратності розбиття, вагових коефіцієнтів, величини організаційних витрат і потужностей центрів, на рисунках виділені зони відповідальності для першого центру. Останній рядок демонструє оптимальне розміщення в Ω служб і відповідне мультиплексне розбиття регіону з нерівномірною густиною населення (чим більшим є значення $\rho(\cdot)$, тим темнішою зображується точка в області).

На рис. 2.10 – 2.12 наведені результати обчислювальних експериментів, які демонструють можливість використання розробленого математичного і алгоритмічного апарату розв’язання неперервних задач оптимального мультиплексного розбиття множин для побудови не лише відомих діаграм

Вороного (мультиплікативно-, адитивно-, мультиплікативно й адитивно зважених), але й нових – з інтегральними обмеженнями на потужності точок-генераторів, оптимальних, для яких точки-генератори розміщуються в обмеженій області за деяким критерієм якості.

Таблиця 2.4

Результати мультиплексного розбиття для 11 центрів

Параметри задачі A-k	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$\rho(x) = 1 \forall x;$ $c(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^2 (x^i - y^i)^2}$ $w_i = 1, a_i = 0, i = \overline{1, N}$ Обмеження відсутні	Розбиття k -го порядку для заданих 11 центрів		
			
$\rho(x) = 1 \forall x;$ $c(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^2 (x^i - y^i)^2}$; $w_i = 1, a_i = 0, i = \overline{1, N},$ $b_1 = 0.5; b_i = 100, i = \overline{2, N}$ (* при $k = 4$ $b_1 = 0.05$)	Розбиття k -го порядку $N=11$ центрів з обмеженнями на їх потужності		
			
$\rho(x) \neq 1 \forall x$ $c(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^2 (x^i - y^i)^2}$ $w = (0.8, 1, 1, 1, 1, 0.7, 1, 1, 0.9, 1, 0.9, 1);$ $a = (2, 3, 4, 5, 6, 3, 2, 5, 4, 3, 6);$ Обмеження відсутні	Розбиття k -го порядку $N=11$ центрів, оптимально розміщених на області з нерівномірною густиною населення		
			

Більш детально використання розроблених моделей і методів розв'язання задач ОМРМ для конструювання нових типів діаграм Вороного описано в роботі [144 – 147].

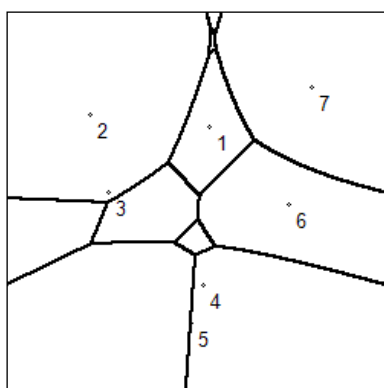


Рис. 2.10 Адитивно зважена діаграма Вороного 3-го порядку для оптимально розміщених семи точок-генераторів

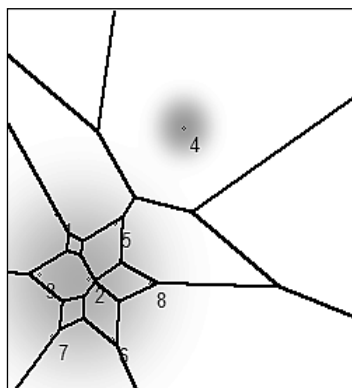


Рис. 2.11 Діаграма Вороного 2-го порядку зваженої області з оптимальним розміщенням семи точок-генераторів

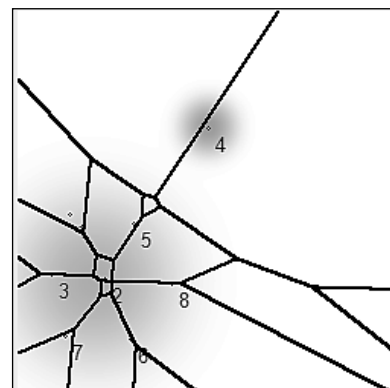


Рис. 2.12 Діаграма Вороного 3-го порядку зваженої області з оптимальним розміщенням семи точок-генераторів

2.7. Розвиток існуючої системи екстреної логістики за рахунок оптимального розташування нових центрів аварійного постачання і перерозподілу навантаження на всі об'єкти

2.7.1. Математична модель задачі оптимального розміщення додаткових центрів і перерозподілу зон обслуговування

На відміну від попередніх задач, в даному параграфі розглядається випадок, коли в деякому регіоні Ω функціонує мережа з m центрів аварійного постачання, але їх можливостей недостатньо для охоплення усіх потенційних клієнтів. Тому на території $\hat{\Omega} \subseteq \Omega$ планується розмістити нові центри; N – загальна кількість об'єктів в розширеній мережі.

Як і у попередніх задачах, нехай $\rho(x)$ – функція, що описує попит на послугу в точці x множини Ω ; S – загальний попит на послугу на заданій території Ω ; b_i – потужність i -го центру; $c(x, \tau_i)$ – вартість надання послуги клієнту в точці $x \in \Omega$ центром τ_i ; a_i – вартість облаштування нового центру чи

модернізації існуючого в точці τ_i , або його фіксовані організаційні витрати, розраховані на одну умовну одиницю попиту, $i = \overline{1, N}$.

Потрібно розмістити нові $(N - m)$ складів на території $\hat{\Omega}$ і перерозподілити зони обслуговування на всій області Ω між всіма N центрами так, аби, враховуючи обмежені їх потужності, гарантовано задовольнити потреби на послугу всього регіону з мінімальними сумарними транспортними і організаційними витратами.

В розробленій математичній моделі: $\hat{\Omega}$ – обмежена, замкнена множина з E_2 ; $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}) \in \Omega$, для всіх $i = \overline{1, N}$, – деякі точки, причому $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ ($m < N$) є заданими, а координати решти центрів $\tau_{m+1}, \tau_{m+2}, \dots, \tau_N$ потрібно визначити, $\tau^{N-m} = (\tau_{m+1}, \tau_{m+2}, \dots, \tau_N) \in \underbrace{\hat{\Omega} \times \dots \times \hat{\Omega}}_{N-m} = \hat{\Omega}^{N-m}$.

Задача А4-к.

$$F(\bar{\omega}, \tau^{N-m}) \rightarrow \min_{\substack{\bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^{N,k} \\ \tau^{N-m} \in \hat{\Omega}^{N-m}}},$$

$$F(\bar{\omega}, \tau^{N-m}) = \sum_{l=1}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \sum_{i \in \sigma_l} (c(x, \tau_i)/w_i + a_i) \rho(x) dx,$$

$$\sum_{\substack{l=1 \\ l: i \in \sigma_l}}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x) dx = b_i, \quad i = \overline{1, p},$$

$$\sum_{\substack{l=1 \\ l: i \in \sigma_l}}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{p+1, N}.$$

Тут $x = (x^{(1)}, x^{(2)}) \in \Omega$; $c(x, \tau_i)$, $i = \overline{1, N}$, $\rho(x)$; $w_i > 0$, $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$, $i = \overline{1, N}$, γ_j^l такі самі, як у попередніх задачах.

Допустима в задачі А4 – **к** пара $(\bar{\omega}^*, \tau^{N-m*})$, на якій функціонал F є найменшим, називається її *оптимальним розв'язком*.

2.7.2. Метод розв'язання задачі і особливості його алгоритмічної реалізації

Вочевидь, задача А-**к** є окремим випадком задачі А4-**к**, коли $m = 0$. А, отже, метод розв'язання задачі А4-**к** розміщення додаткових центрів мережі

сервісних підприємств $\tau_{m+1}, \tau_{m+2}, \dots, \tau_N$ і перерозподілу сфер обслуговування для всіх центрів, такий самий, як і для задачі **A-k**, з тією лише різницею, що мінімізація цільового функціоналу (а відповідно, і функціоналу Лагранжа) відбувається, поряд з розбиттям і за вектором $\tau^{N-m} = (\tau_{m+1}, \tau_{m+2}, \dots, \tau_N) \in \hat{\Omega}^{N-m}$.

Базуючись на результатах попереднього параграфу, знайдемо оптимальний розв'язок задачі **B4-k**, еквівалентної **A4-k**, але сформульованої в термінах характеристичних функцій підмножин, що складають мультиплексне розбиття множини Ω : для всіх $i = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, L}$ и майже всіх $x \in \Omega$

$$\hat{\lambda}_i^l(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } c(x, \hat{\tau}_i)/w_i + a_i + \gamma_i^l \hat{\psi}_i \leq c(x, \hat{\tau}_j)/w_j + a_j + \gamma_j^l \hat{\psi}_j, \\ \forall i \in \sigma_l, j \in N \setminus \sigma_l, \\ 0 \text{ у протилежному випадку,} \end{cases}$$

де $\hat{\tau}_{m+1}, \dots, \hat{\tau}_N, \hat{\psi}_1, \dots, \hat{\psi}_N$ – є розв'язок наступної задачі скінченновимірної умовної оптимізації:

$$G(\psi) = \min_{\tau^{N-m} \in \hat{\Omega}^{N-m}} G_1(\tau, \psi) \rightarrow \max \quad (2.52)$$

за умов

$$\psi_i \geq 0, \quad i = \overline{p+1, N}, \quad (2.53)$$

$$G_1(\tau^{N-m}, \psi) = \int_{\Omega} \min_{\substack{\sigma_l \in M(N, k) \\ l = \overline{1, L}}} \sum_{i \in \sigma_l} \left[\frac{c(x, \tau_i)}{w_i} + a_i + \gamma_i^l \psi_i \right] \rho(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i. \quad (2.54)$$

Чисельна реалізація методу передбачає перехід до задачі

$$\max_{\psi \in E^N} \min_{\tau^{N-m} \in \hat{\Omega}^{N-m}} U(\tau^N, \psi),$$

де $U(\tau^{N-m}, \psi) = G_1(\tau^{N-m}, \psi) - Q \sum_{i=p+1}^N \max(0, -\psi_i)$, Q – додатне число (більше за множники Лагранжа). Далі вектор τ^{N-m} будемо позначати τ . Для розв'язання отриманої задачі можна застосувати алгоритм 2.4, з тією лише різницею, що компоненти $g_U^j(\tau, \psi), j = m+1, \dots, N$, вектору $g_U(\tau, \psi) = (g_U^\tau(\tau, \psi), -g_U^\psi(\tau, \psi))$ узагальненого псевдоградієнта функції $U(\tau^{N-m}, \psi)$ в

точці $(\tau, \psi) = (\tau_{m+1}, \dots, \tau_N, \psi_1, \dots, \psi_N)$ обчислюються за допомогою скінченних різниць, оскільки зміна цих координат викликає перерозподіл зон відповідальності не тільки центрів, що розміщуються, але й існуючих.

2.7.3. Результати розв'язання модельних задач

Розглянемо результати розв'язання деяких модельних задач оптимального розміщення нових об'єктів деякої мережі центрів аварійного постачання з перерозподілом сфер обслуговування існуючих і нових підприємств.

Для перевірки коректності роботи алгоритму спочатку була розв'язана низка задач, коли підприємства функціонують монопольно на своїй території.

Для всіх наведених нижче прикладів:

$$\Omega = \{x \in R^2: 0 \leq x_j \leq 10, j = 1, 2\};$$

$$\rho(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega;$$

$$w_i = 1, \forall i = \overline{1, N};$$

функція відстані – метрика Мінковського з параметром p :

$$c(x, \tau_i) = \sqrt[p]{(x_1 - \tau_1^i)^p + (x_2 - \tau_2^i)^p}.$$

Задача 1. На рис. 2.13 подано результати зонування території до та після розміщення трьох нових центрів (7-го, 8-го та 9-го) з такими початковими даними:

$$N = 9, m = 6, p = 2, a = (1.02; 1.53; 2.7; 1; 1.08; 1.54; 2.23; 1.89; 2.03), k = 1.$$

За рахунок оптимального розміщення нових центрів і перерозподілу монопольних зон обслуговування значення цільового функціоналу зменшилось майже на 10% з 349.54 до 314.345 одиниць.

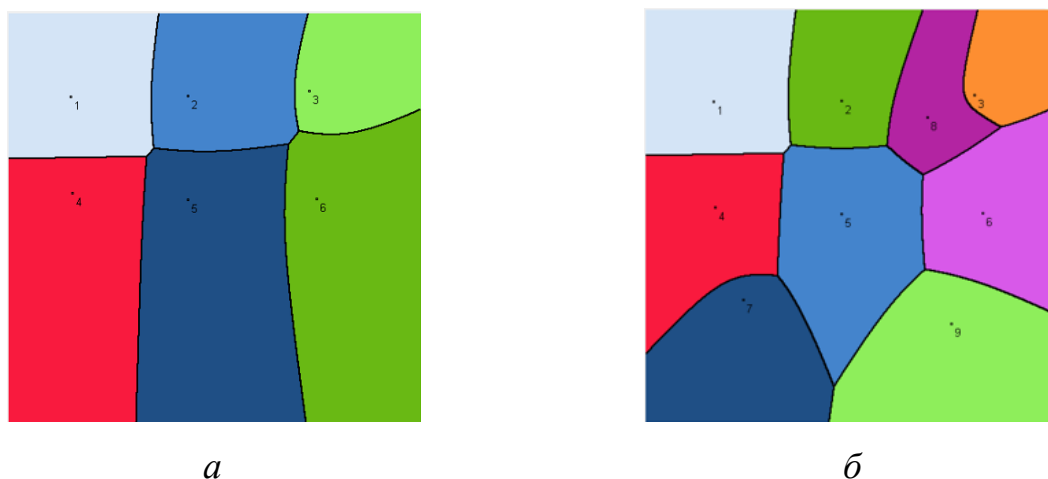


Рис. 2.13. Оптимальні монопольні зони відповідальності в задачі 1:

a – для шести діючих центрів,

б – для шести діючих і трьох нових, оптимально розміщених

Як і очікувалося, ненульові значення компонент вектора *a* обумовили гіперболічну форму границь між зонами. З табл. 2.5 видно, наскільки розміщення нових підрозділів і перерозподіл зон обслуговування дозволило зменшити і майже рівномірно розподілити навантаження між об'єктами мережі.

Таблиця 2.5

Навантаження на центри в задачі 1

№ центру	Навантаження на центр	
	до перерозподілу	після перерозподілу
1	17,499	13,215
2	13,727	10,775
3	19,432	9,215
4	17,033	11,707
5	14,038	10,117
6	18,267	11,034
7	0	9,125
8	0	11,105
9	0	13,705

Задача 2. Вхідні дані: $N = 7, m = 6, p = 2, k = 1, a_i = 0, \forall i = \overline{1, N}$.

В результаті оптимального розміщення сьомого центру отримане розбиття на монопольні зони обслуговування, наведене на рис. 2.14, *а*. Попереднє зонування між шістьма центрами показано на рис. 2.14, *б*. Значення функціоналу за рахунок відкриття нового центру змінилося з 172,98 до 161,64.

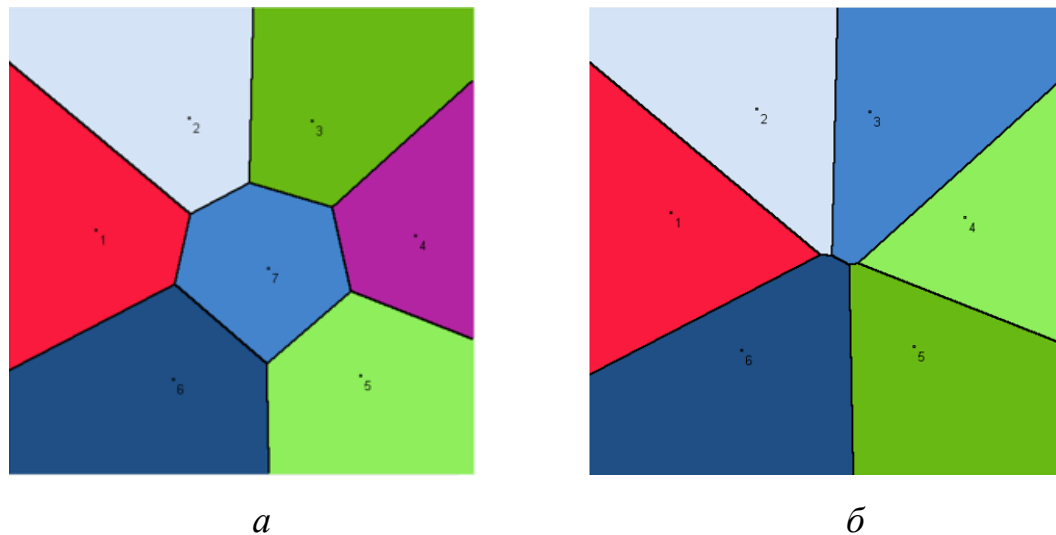
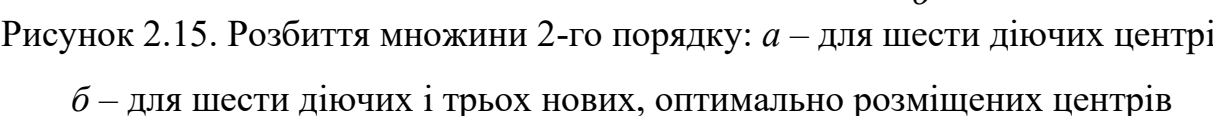


Рис. 2.14. Монопольні зони обслуговування в задачі 2 для: *а* – шести фіксованих і одного оптимально розміщеного, *б* – шести фіксованих центрів

Далі розглядаються випадки, коли при наявності фіксованих центрів і відповідного розбиття території з'являється необхідність розмістити додаткові центри і визначити нові зони обслуговування з можливістю їх перекриття двократно і трикратно.

Задача 3. Вхідні дані: $N = 9, m = 6, p = 2, k = 2$, параметри $a_i, \forall i = \overline{1, N}$, наведено в табл. 2.6.

На рис. 2.15, *а* зображене оптимальне дуплексне розбиття, яке є розв'язком задачі ОМРМ без урахування обмежень на потужності діючих шести центрів. Рис. 2.15, *б* відтворює мультиплексне розбиття для задачі, у якій додатково розміщені у відповідності до критерію оптимальності три центри – 7-й, 8-й і 9-й.



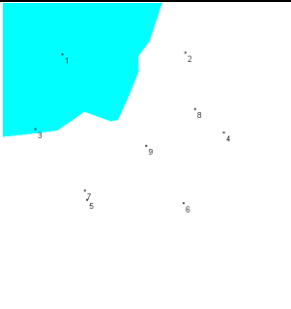
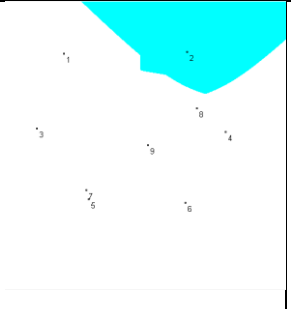
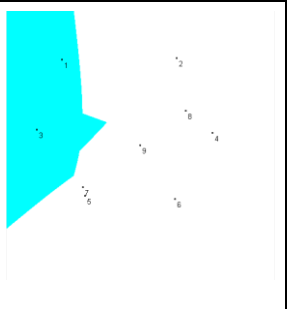
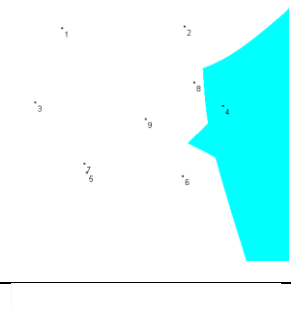
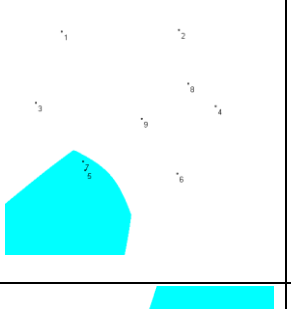
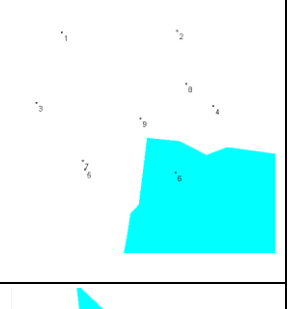
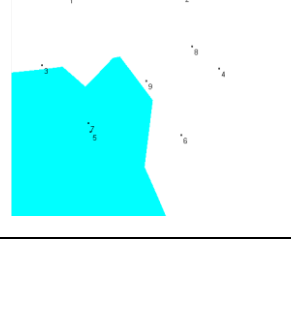
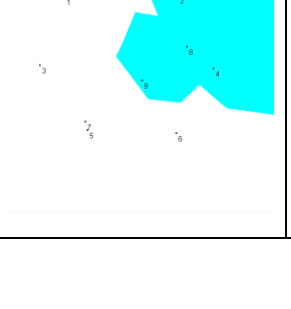
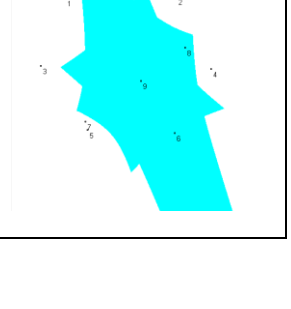
йні	Навантаження на це

центру	витрати a_i	до перерозподілу	після перерозподілу
1	2,14	13,394	10,250
2	2,35	13,909	7,542
3	2,14	17,055	9,826
4	1,34	22,290	9,791
5	2,40	14,424	6,779
6	1,62	18,927	10,222
7	1,63	0	13,803
8	1,53	0	14,995
9	0,91	0	16,792

У табл. 2.7 наведені ці зони для кожного центру після розміщення нових. Початкове значення цільового функціоналу 873,586 зменшилося за рахунок відкриття нових центрів на 14% і склало 755,162.

Таблиця 2.7

Зони обслуговування після розміщення нових центрів

№	Зона	№	Зона	№	Зона
1		2		3	
4		5		6	
7		8		9	

На наведених прикладах зонування можна також помітити, що розміщення нових центрів має істотний вплив на навантаження найближчих до них. Навантаження на більш віддалені центри, а, отже, й їх потужності, можуть або зменшуватися незначно, або залишатися незмінними.

Задача 4. Вхідні дані: $N = 10, m = 9, p = 1, k = 3, a_i = 0, \forall i = \overline{1, N}$. Рис. 2.16, *а* представляє розбиття третього порядку для фіксованих 9-ти центрів, на рис. 2.16, *б* представлено оптимальне зонування після додатково розміщеного 10-го центру.

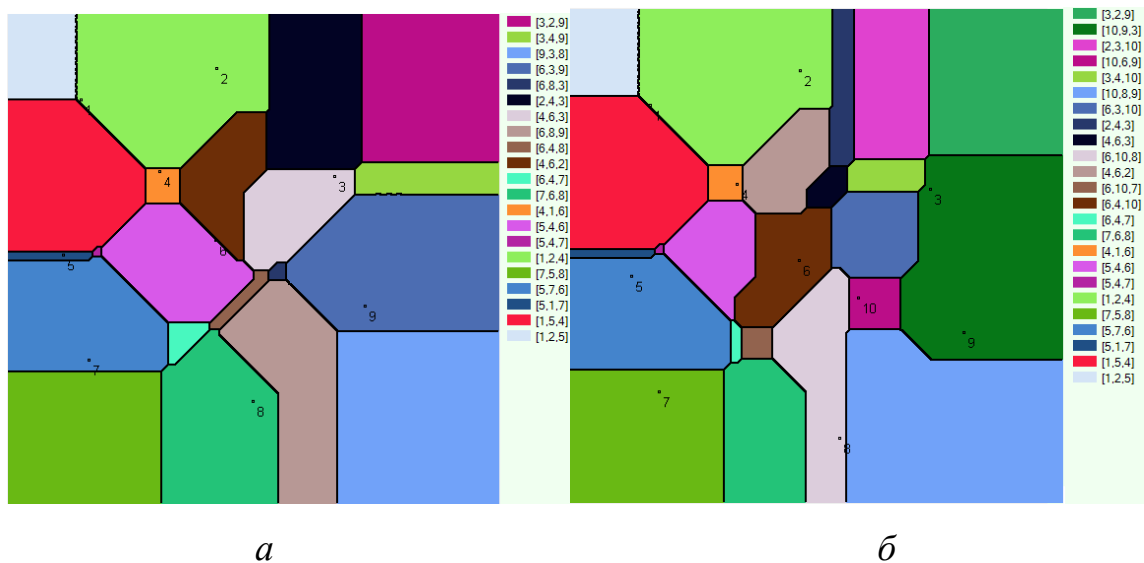


Рис. 2.16. Триплексне розбиття множини для центрів: *a* – 9-ти фіксованих, *б* – для 9-ти фіксованих і одного оптимально розміщеного

2.8. Висновки за розділом II

У другому розділі дисертаційної роботи розроблено математичні моделі і методи розв'язання задач оптимального зонування територій із закріпленням зон за певними центрами або об'єктами соціального призначення для надання послуг, пов'язаних з організацією аварійно-рятувальних та інших операцій у разі загрози виникнення надзвичайних ситуацій техногенного характеру. Такими центрами можуть бути служби соціального захисту, склади аварійного постачання й розподілу предметів першої необхідності та ін. При цьому передбачено: 1) можливість перекриття зон на той випадок, коли найближчий до постраждалого центр не зможе надати послугу; 2) оптимальне розміщення певної кількості вказаних центрів, коли потужності функціонуючих не задовольняють у повній мірі потреби всього регіону.

Моделі побудовано у вигляді задач оптимального мультиплексного розбиття континуальних множин. Такі задачі є новими за своїм математичним формулюванням, їх окремими постановками є неперервні задачі ОРМ, добре вивчені в дніпропетровській науковій школі професора О.М. Кісельової.

Запропоновано декілька можливих критеріїв якості мультиплексного зонування територій.

Детально досліджено лінійні моделі оптимального мультиплексного розбиття множин. Зонування регіону здійснюється у такий спосіб, що певна зона отримується не у вигляді просторової монополії одного центру, а є загальною територією для конкретного набору з k найближчих або найбільш привабливих центрів, які можуть обслуговувати її мешканців.

Отримано в аналітичному вигляді та теоретично обґрунтовано розв'язки задач ОМРМ із заданими центрами, задач ОМРМ з розміщенням центрів, без інтегральних умов на їх потужності чи з урахуванням обмежених їхніх можливостей. Показано, що у загальному випадку розв'язки задач мультиплексного розбиття містять параметри, які є, у свою чергу, результатом розв'язання допоміжних задач скінченновимірної умовної оптимізації недиференційованих функцій.

Теоретично обґрунтовані та виявлені у результаті обчислювальних експериментів деякі властивості розв'язків задач ОМРМ. Досліджено задачі розширення функціонуючої мережі сервісних центрів, коли декілька з них вже функціонують, а певна кількість нових центрів розміщується на певній території, а, отже, й перерозподіляються зони відповідальності для усіх центрів. Зазначені особливості реалізації алгоритму розв'язання таких задач.

Розроблений математичний та алгоритмічний апарат мультиплексного розбиття множин надає можливість будувати діаграми Вороного вищих порядків і їх різні узагальнення на основі єдиного підходу: формулювання задачі ОМРМ з критерієм якості розбиття, який забезпечує відповідний тип кратної діаграми Вороного, і застосування відповідного методу розв'язання отриманої задачі. В результаті можна конструювати не лише відомі, але й нові типи зазначених структур обчислювальної геометрії. Діаграм Вороного мають широке коло практичних застосувань – комп'ютерна графіка, геометричне моделювання, розпізнавання образів, візуалізація медичних наборів даних, аналіз форм. Відтак, розроблений математичний і алгоритмічний апарат задач

оптимального мультиплексного розбиття континуальних множин може використовуватися при розв'язуванні проблем з вказаних галузей науки і техніки.

Моделі і методи задач ОМРМ є складовою частиною математичного забезпечення програмного додатку, який використовується в системах екстреної логістики для територіальної сегментації і розподілу матеріальних потоків на випадок техногенних надзвичайних ситуацій.

Результати досліджень другого розділу наведено в наукових публікаціях автора [110, 127 – 138, 144 – 159].

РОЗДІЛ III

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЗОНУВАННЯ ТЕРИТОРІЙ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ РОЗМІЩЕННЯ РЯТУВАЛЬНИХ ОБ'ЄКТІВ В СИСТЕМАХ ЕКСТРЕНОЇ ЛОГІСТИКИ

3.1. Моделювання і оптимізація зон в системах спостереження і екстреної допомоги на випадок надзвичайної ситуації

Ще одним напрямом подальшого розвитку наукових основ зонування територій і оптимізації розміщення об'єктів систем цивільного захисту є розробка методів розв'язання задач багатократного покриття, які є цікавими та важливими з прикладної точки зору [91, 95, 159, 160]. Саме багатократне покриття зон обслуговування використовують навігаційні системи GPS, Глонасс, європейська система Галілео, що розробляється [161, 162, 163]. Прикладом задач багатократного оптимального кульового покриття є задача розміщення камер протипожежної системи відеоспостереження за лісами. Поворотна відеокамера є дистанційно керованою і може повертатися на 360 градусів та забезпечувати оператора даними в режимі реального часу. З метою надійної ідентифікації можливих місць загоряння потрібно територію, за якою ведеться спостереження, покривати такими колами як мінімум дворазово.

Задачі k -кратного покриття з'являються через розміщення розподільних або логістичних центрів, приміром:

- задачі розміщення пунктів первинної медичної допомоги або рятувальних служб на випадок надзвичайних ситуацій з метою надання певної послуги навіть найвіддаленішому мешканцю постраждалої території у найкоротший термін (рис. 3.1) [164 – 166];

- задачі розміщення пунктів зберігання хімічних реагентів для нафто- або газовидобутку, в якій важливо розмістити ці пункти так, аби якнайшвидше доставляти реагенти в місце призначення. Суттєвою у цій і в попередніх задачах є умова про те, що у випадку, коли найближчий пункт неспроможний

за якихось поважних причин надати відповідну послугу клієнту (наприклад, необхідного реагенту не виявилось в наявності або на даний момент часу всі агенти служби зайняті), то бажано, аби інший пункт перебував не надто далеко. В результаті задача полягає, як мінімум, у дворазовому покритті заданої множини споживачів послуги зонами обслуговування окремими центрами;

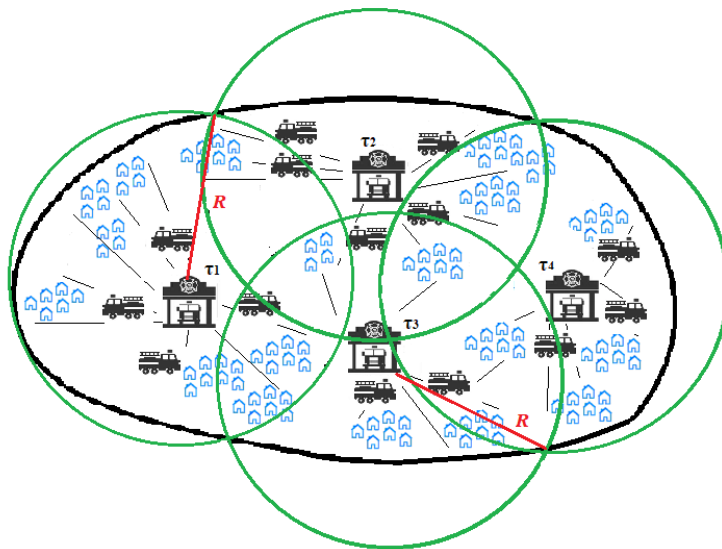


Рис. 3.1. Розміщення рятувальних об'єктів і зонування території

– задачі триразового оптимального покриття, які виникає під час планування мережі станцій стільникового зв'язку стандарту GSM. При цьому передбачається, що кожен абонент має перебувати в зоні обслуговування принаймні трьох базових станцій. Хоча його й забезпечує зв'язком найближча станція, у разі її перевантаження обслуговування передається іншій, менш завантаженій станції.

Широкий спектр практичних застосувань задач багатократного кульового покриття двовимірної області наведений, наприклад, у роботах [68, 92, 95]. Більшість представлених в науковій літературі моделей задач мінімального покриття є дискретними, приміром, задачі (0-1) покриття та багатократного покриття в математичній постановці зводяться до задач ЦЛП [85, 91, 167– 170]. Для неперервних задач покриття характерним є континуальна множина, що покривається [95, 171–174 та ін.]. Добре вивченою

є задача про p -центри, в якій обмежена множина на площині покривається кругами однакового радіусу. Велика бібліографія з питань розробки алгоритмів розв'язання задачі про p -центри наведена у [91]. В [162] кратні діаграми Вороного [124] використовуються для визначення напрямку спуску під час розв'язання задач мінімаксимуму. Інші підходи і засновані на них алгоритми багатократного покриття обмежених областей N кулями з однаковим мінімальним радіусом представлені у дослідженнях [95, 124, 169, 171 – 174].

3.1.1. Математичне моделювання оптимального багатократного покриття обмеженої множини. Властивості. Метрики

Сформулюємо задачу багатократного покриття обмеженої на площині множини колами мінімального радіусу, використовуючи термінологію теорії неперервних задач ОРМ [175 – 177].

Нехай $\Omega \subset E_2$ – обмежена, замкнена множина, $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}) \in \Omega$, $i = 1, \dots, N$, – деякі точки. $B(\tau_i, R) = \{x \in E_n: c(x, \tau_i) \leq R\}$ – c -куля радіуса R з центром у точці τ_i з Ω , де $c(x, \tau_i)$ – метрика.

Будемо говорити, що сукупності центрів $\tau_1, \dots, \tau_N$ відповідає **k -кратне кульове покриття множини Ω з радіусом $\hat{R}$** , якщо

$$\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^N B(\tau_i, \hat{R}),$$

і для кожної точки $x \in \Omega$ виконується умова $x \in \bigcap_{j=1}^l B(\tau_{i_j}, \hat{R})$, $i_j \in \{1, 2, \dots, N\}$, $k \leq l \leq N$. При цьому радіус $\hat{R}$ визначається за наступною формулою:

$$\hat{R}(\tau^N) = \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i), \quad (3.1)$$

при цьому для кожної точки $x \in \Omega$ виконується умова

$$x \in \bigcap_{j=1}^l B(\tau_{i_j}, \hat{R}), \quad k \leq l \leq N, \quad i_j \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad (3.2)$$

де $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in E_2^N$ (або, в окремому випадку, $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N$).

k -кратне покриття множини Ω , що задається вектором $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$, з радіусом $\hat{R}(\tau^N)$, який визначається за формулою (3.1) й задовольняє умови (3.2), є **мінімальним k -кратним c -кульовим покриттям**, яке генерується вектором τ^N .

k -кратне покриття називається **оптимальним**, якщо його радіус є мінімальним, тобто

$$\hat{R}(\tau_*^N) = \inf_{\tau^N} \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i),$$

де $\tau_*^N = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$ – набір центрів, на якому досягається $\hat{R}(\tau_*^N)$ за умови виконання для кожної точки $x \in \Omega$ включення (3.2).

Формалізуємо задачу пошуку найменшого радіуса N куль, котрі генерують k -кратне c -кульове покриття множини по-іншому.

Нехай $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ – заданий на множині Ω або взагалі на площині набір центрів. Точки $\tau_{i_1}, \tau_{i_2}, \dots, \tau_{i_k} \in \Omega$ є k -найближчими сусідами точки $x \in \Omega$ із заданих N точок, якщо

$$\forall j = \overline{1, k} \quad c(x, \tau_{i_j}) < c(x, \tau_m), \quad m \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}.$$

В окремих випадках, наприклад, коли множина Ω має симетричну структуру або центри $\tau_1, \dots, \tau_N$ розміщені в області Ω з певною закономірністю, для деяких точок $x \in \Omega$ знак вищезазначеної нерівності може бути нестрогим. Тоді вважатимемо, наявність декількох різних наборів з k найближчих сусідів для точки $x \in \Omega$, та реалізуючи алгоритм їх пошуку для однозначності будемо припускати, що набір k найближчих сусідів утворюють точки $\tau_{i_1}, \tau_{i_2}, \dots, \tau_{i_k}$, які задовольняють наступній системі нерівностей

$$\forall j = \overline{1, k} \quad c(x, \tau_{i_j}) \leq c(x, \tau_m), \quad m \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$$

і мають найменші можливі індекси.

Введемо до розгляду множину Λ_N^k N -вимірних векторів, координати яких дорівнюють 0 або 1, причому у кожному такому векторі кількість одиниць дорівнює k :

$$\Lambda_N^k = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N): \lambda_i = 0 \vee 1, i = \overline{1, N}; \sum_{i=1}^N \lambda_i = k \right\}.$$

Вочевидь, $|\Lambda_N^k| = C_N^k$.

Тоді для кожної точки $x \in \Omega$ k найближчих сусідів з фіксованого набору точок $(\tau_1, \dots, \tau_N)$ можна знайти, розв'язуючи задачу пошуку такого вектору $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)) \in \Lambda$, за якого досягається мінімальне значення наступної величини:

$$C(x) = \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=\overline{1, N}} c(x, \tau_i) \lambda_i(x). \quad (3.3)$$

Розрахунок величини $C(x)$ за формулою (3.3) проілюструємо на **прикладі** [95]. Нехай $x \in \Omega$ – довільна, але фіксована точка, а відстань від неї до кожного з центрів $\tau_1, \dots, \tau_5$ задано в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Відстань $c(x, \tau_i)$ для **прикладу**

№ центра	$c(x, \tau_i)$
1	7
2	9
3	5
4	10
5	6

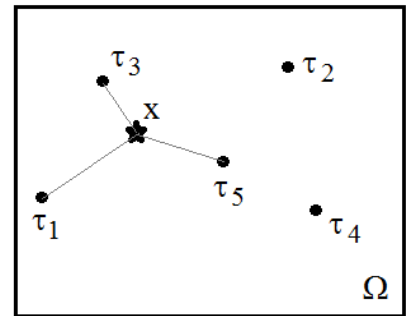


Рис. 3.2. Ілюстрація до **прикладу**

Множина Λ_5^3 містить $C_5^3 = 10$ елементів. В таблиці 3.2 відтворено процес обчислення $C(x)$ і виділено вектор $\lambda^*(x)$, на якому ця величина досягається. Одиничні компоненти цього вектору вказують на номери центрів, котрі є трьома найближчими до точки x . Відтак, можна вважати, що на множині Ω визначена вектор-функція $\lambda(\cdot) \in \hat{\Lambda}$, де $\hat{\Lambda} = \{\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_N(x)): \lambda(x) \in \Lambda_N^k \quad \forall x \in \Omega\}$.

Для кожної точки $x \in \Omega$ $\lambda_i(x) = 1$ лише у тому випадку, якщо центр τ_i є одним з k можливих її «сусідів». Вектор $\lambda(x)$, на якому досягається величина $C(x)$, визначає для точки x k найближчих до неї центрів. Величина $C(x)$ – радіус куль з центрами в точках $\tau_{i_1}, \tau_{i_2}, \dots, \tau_{i_k}$, які покривають x k -кратно. Якщо серед усіх величин $C(x)$, $x \in \Omega$, вибрати найбільшу, то вона й визначатиме радіус куль з центрами в точках $(\tau_1, \dots, \tau_N)$, що k -кратно покривають множину Ω .

Таблиця 3.2

Розрахунок величини $C(x)$ в прикладі

$\lambda(x)$	$\max_{i=1, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x)$
(1,1,1,0,0)	9
(1,1,0,1,0)	10
(1,1,0,0,1)	9
(1,0,1,1,0)	10
(1,0,1,0,1)	7
(0,1,1,1,0)	10
(0,1,1,0,1)	9
(1,0,0,1,1)	10
(0,1,0,1,1)	10
(0,0,1,1,1)	10
$C(x) = \min_{\lambda(x) \in \Lambda^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x)$	7

Відтак, радіус N куль, котрі генерують k -кратне c -кульове покриття множини можна визначити за наступною формулою:

$$\bar{R} = \sup_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x).$$

А задача про мінімальне k -кратне c -кульове покриття формулюється у наступному вигляді:

$$\bar{R}(\lambda^*(\cdot), \tau_*^N) = \inf_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N} \sup_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x), \quad (3.4)$$

де $\Lambda_N^k = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) : \lambda_i = 0 \vee 1, i = \overline{1, N}; \sum_{i=1}^N \lambda_i = k \right\}$, а також вектор-функцію $\lambda^*(\cdot) : \forall x \in \Omega \quad \lambda^*(x) \in \Lambda_N^k$, та вектор $\tau_*^N = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*) \in \Omega^N \subset E_2^N$, за яких у виразі (3.4) досягається нижня грань.

Отже, вектор-функція $\lambda(\cdot)$ використовується для конструктивного запису математичної моделі задачі та є проміжним результатом.

Окремими випадками наведених двох задач про k -кратне c -кульове покриття множини або їх узагальненнями є наступні постановки.

Задача k -П1 (покриття з фіксованими центрами). Для заданого набору центрів $(\tau_1, \dots, \tau_N)$ з E_2^N (або з Ω^N) потрібно знайти мінімальне k -кратне c -кульове покриття Ω .

Математично задача **k -П1** зводиться до пошуку величини (3.1).

Припускаючи, що координати центрів $\tau_1, \dots, \tau_N$ є невідомими заздалегідь і вимагаючи їх розміщення на множині Ω так, аби отримати k -кратне c -кульове покриття мінімального радіуса, можна сформулювати наступну задачу про k -кратне покриття.

Задача k -П2 (оптимального покриття з розміщенням центрів куль в обмеженій області). За заданою кількістю N центрів $\tau_1, \dots, \tau_N$ знайти їх таке положення в області Ω , аби воно визначало її k -кратне покриття з мінімальним радіусом куль.

Задача k -П3 (загальна, оптимального k -кратного c -кульового покриття). Знайти розміщення у просторі E_2 N центрів $\tau_1, \dots, \tau_N$, яке k -кратно покриває множину Ω кулями однакового мінімального радіусу.

У припущенні, що кількість N центрів $\tau_1, \dots, \tau_N$ не є заданою заздалегідь, можна сформулювати **задачу**: знайти мінімальне число центрів k -кратного покриття певної множини.

Задача k -П4. За заданим радіусом покриття $\hat{R}$ знайти найменше число N центрів $\tau_1, \dots, \tau_N$, які генерують k -кратне покриття множини Ω .

3.1.2. Методи багатократного кульового покриття обмеженої множини

По-перше слід зазначити, що у випадку, коли функції $c(x, \tau_i)$ є неперервними функціями своїх аргументів, а множина Ω є обмеженою компактною на площині, існує c -оптимальне k -кратне покриття цієї множини заданим N числом c -куль, а (3.4) можна записати у наступному вигляді:

$$\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N) \rightarrow \min_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N}, \quad (3.5)$$

де

$$\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N) = \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x).$$

Цільова функція $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$ задачі (3.5) з евклідовою метрикою $c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_2$ має такі властивості [178 – 180].

1. Функція $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$ – неперервна і обмежена на Ω^N .

2. Функція $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$ задачі (3.5) задовольняє умову Ліпшица на Ω^N :

$$\left| \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x) - \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \bar{\tau}_i) \lambda_i(x) \right| \leq L \cdot \|\tau^N - \bar{\tau}^N\|_{E_2^N},$$

де $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$, $L > 0$ – константа Ліпшица, яка не залежить від вибору точок τ^N і $\bar{\tau}^N$ з Ω^N .

3. Функція $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$ задачі (3.5) не є опуклою на Ω^N .

4. Функція $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$ майже всюди диференційовна на множині Ω^N .

5. Багатоекстремальна функція $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$ залежно від структури множини Ω може мати (з точністю до перенумерування центрів) скінченне або нескінченне число глобальних мінімумів, а також може мати локальні мінімуми.

6. Для не пустої компактої множини Ω з E_2 і $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ з Ω^N справедливою є наступна рівність:

$$\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N) = \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x) = \max_{m=1, M} \max_{x \in \Omega_m} \max_{i \in T_m} c(x, \tau_i),$$

де множини Ω_m , $m = \overline{1, M}$, $M \leq C_N^k$, складають k -кратну діаграму Вороного для множини Ω , тобто таке розбиття множини Ω на підмножини $\Omega_1, \dots, \Omega_M$, що:

$$\cup_{i=1}^M \Omega_i = \Omega; \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \forall i \neq j, i, j = \overline{1, M};$$

$$\Omega_m = \{x \in \Omega: \forall j \in T_m \quad c(x, \tau_j) < c(x, \tau_i), \quad i \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus T_m\},$$

де $T_m = \{i_1^m, i_2^m, \dots, i_k^m\}, m = \overline{1, M}$ – всі можливі k -елементні підмножини множини індексів $\{1, 2, \dots, N\}$.

Враховуючи відповідність набору k центрів з індексами $i_1^m, i_2^m, \dots, i_k^m$ множині Ω_m , для останньої надалі будемо використовувати таке позначення: $\Omega(\bar{\tau}^{T_m})$, де $\bar{\tau}^{T_m} = \{\tau_{i_1^m}, \tau_{i_2^m}, \dots, \tau_{i_k^m}\}$. Відтак, Ω_m містить точки множини Ω , для яких центри з індексами із набору $T_m = \{i_1^m, i_2^m, \dots, i_k^m\} \in k$ -найближчими сусідами.

Чисельні алгоритми розв'язання задачі (3.5), наведені нижче, базуються на методі проєкції узагальненого градієнту [181]. При цьому j -ю компоненту N -вимірному вектору узагальненого градієнта

$$g_{\hat{R}}(\tau^N) = (g^{\tau_1}(\tau^N), \dots, g^{\tau_j}(\tau^N), \dots, g^{\tau_N}(\tau^N)) \quad (3.6)$$

функції $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$ в точці $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ можна обчислювати двома способами:

1) з використанням чисельного диференціювання:

$$g^{\tau_j}(\tau^N) = (g_1^{\tau_j}(\tau^N), g_2^{\tau_j}(\tau^N)), \quad (3.7)$$

де s -та компонента обчислюється наближено за формулою:

$$g_1^{\tau_j}(\tau^N) = \frac{\hat{R}(\tau_1, \dots, (\tau_j^{(1)} + \Delta, \tau_j^{(2)}), \dots, \tau_N) - \hat{R}(\tau_1, \dots, (\tau_j^{(1)}, \tau_j^{(2)}), \dots, \tau_N)}{\Delta},$$

$$g_2^{\tau_j}(\tau^N) = \frac{\hat{R}(\tau_1, \dots, (\tau_j^{(1)}, \tau_j^{(2)} + \Delta), \dots, \tau_N) - \hat{R}(\tau_1, \dots, (\tau_j^{(1)}, \tau_j^{(2)}), \dots, \tau_N)}{\Delta},$$

$$j = \overline{1, N};$$

Δ – деякий приріст компоненти вектора τ , параметр методу;

2) за допомогою k -кратної діаграми Вороного. Позначимо через V фіксоване розбиття непустиї компактної множини Ω на $\bar{M} \leq C_N^k$ підмножин $V_1, \dots, V_m, \dots, V_{\bar{M}}$, котрі складають k -кратну діаграму Вороного для Ω , причому всі V_i – непорожні, компактні.

Введемо також для кожного $i = 1, \dots, N$ функції

$$R_i(\tau^N) = \max_{T_m: i \in T_m} \max_{x \in V(\bar{\tau}^{T_m})} c(x, \tau_i). \quad (3.8)$$

Субградієнтну множину $G_{R_i^V}(\hat{\tau}^N)$ функції (3.8) в точці $\hat{\tau}^N$ обчислюватимемо за формулою

$$G_{R_i^V}(\hat{\tau}^N) = \overline{\text{co}} \bigcup_{x \in I(\hat{\tau}^N)} G_{c(x, \tau_i)}(\hat{\tau}^N), \quad (3.9)$$

де $I(\hat{\tau}^N) = \{x: x \in \bigcup_{m: i \in T_m} V_m; c(x, \hat{\tau}_i) = R_i(\hat{\tau}^N)\}$; $G_{c(x, \tau_i)}(\hat{\tau}^N)$ – субдиференціал функції $c(x, \tau_i)$ за τ_i на E_2 при фіксованому $x \in V_i$.

Узагальнений градієнт цільової функції задачі (3.5) має наступний вигляд:

$$g_{\hat{R}}(\tau^N) = (g_{R_1}^{\tau_1}(\tau^N), \dots, g_{R_i}^{\tau_i}(\tau^N), \dots, g_{R_N}^{\tau_N}(\tau^N)),$$

i -та компонента якого є елементом субградієнтної множини функції $R_i(\tau^N)$, $i = \overline{1, N}$, з (3.8) в точці τ_i , що записується так:

$$G_{R_i^V}^{\tau_i}(\tau^N) = \overline{\text{co}} \left\{ g_c^{\tau_i}(\bar{x}, \tau^N), \bar{x}: c(\bar{x}, \tau_i) = \max_{T_m: i \in T_m} \max_{x \in V(\bar{\tau}^{T_m})} c(x, \tau_i) \right\}, i = \overline{1, N}. \quad (3.10)$$

Тут $g_c^{\tau_i}(\bar{x}, \tau^N)$ – узагальнений градієнт функції $c(x, \tau_i)$ в точці $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$, $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)})$.

На квадраті з рис. 3.3 зображено двократну діаграму Вороного для 8 центрів, і для кожного з них вказано напрямок до одного з елементів множини (3.10).

Субградієнтна множина $G_{R_i^V}^{\tau_i}(\tau^N)$ є не пустою, опуклою, компактною.

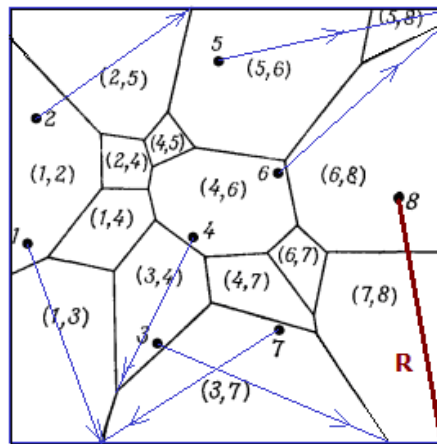


Рис. 3.3. Можливий напрямок здвигу центрів на двократній діаграмі Вороного

В формулі (3.10) $T_m - m$ -та підмножина фіксованого k -кратного розбиття множини Ω . Однак, якщо розбиття множини Ω на підмножини не є фіксованим, і не є відомим розташування точок $\tau_1, \dots, \tau_N$, які генериують оптимальне покриття множини Ω , тобто відповідне k -кратне розбиття Вороного, то функція $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$ задачі (3.5) не є опуклою на Ω^N внаслідок неопуклості за τ^N функції $\hat{r}(x, \tau^N) = \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x)$ на Ω^N .

Хоча функція $\hat{r}(x, \tau^N)$ не є опуклою за τ^N за будь-якого фіксованого $x \in \Omega$, вона складається з опуклих частин, які відповідають мінімумам функції $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$, тому (див. [181]) її **квазіградієнт** збігається із субградієнтом на одній з опуклих ділянок, котра примикає до даної точки.

Можливість генерувати монотонно спадну послідовність значень цільової функції $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$ задачі (3.5) надає наступне твердження.

Твердження. Нехай Ω – компактна множина з E_2 і

$$\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N) = \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x).$$

Якщо центри $\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_N$ задовольняють умову

$$\max_{x \in \Omega(\tilde{\tau}_i)} c(x, \tilde{\tau}_i) = \min_{\tau_i \in \text{co}\Omega(\tau_i)} \max_{x \in \Omega(\tau_i)} c(x, \tau_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

то $\hat{R}(\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_N) \leq \hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$. Тут центр $\tilde{\tau}_i$ задає кулю, що покриває $\Omega(\tau_i)$ з мінімальним радіусом покриття.

3.1.3. Конструктивні алгоритми розв'язання задач про оптимальне багатократне кульове покриття обмеженої множини

Не втрачаючи загальності, розглянемо покриття одиничного квадрата $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. В алгоритмі вектор τ^N позначатимемо τ .

Для розв'язання задачі пошуку радіуса N куль, що утворює k -кратне c -кульове покриття заданої множини Ω запропоновано два підходи.

Згідно **першого** задачу ватро сформулювати у такий спосіб: знайти

$$R = \max_{x \in \Omega} \min_{I_m \in \bar{I}} \max_{i \in I_m} c(x, \tau_i), \quad (3.11)$$

де $\bar{I}$ – множина всіх можливих комбінацій k елементів, вибраних із N ; I_m – окремий її елемент. Вочевидь, $|\bar{I}| = C_N^k$.

Для реалізації (3.11) Ω покривається прямокутною сіткою. Нехай $\tilde{\Omega}$ – множина всіх вузлів сітки. Наближене значення шуканого радіусу обчислюється за наступною формулою:

$$\tilde{R} = \max_{x \in \tilde{\Omega}} \min_{I_m \in \bar{I}} \max_{i \in I_m} c(x, \tau_i).$$

За **другим** підходом для обчислення радіусу мінімального покриття для кожної точки $x \in \Omega$ обчислюються відстані до центрів $(\tau_1, \dots, \tau_N)$ і застосовується процедура сортування отриманого масиву.

Якщо область Ω має складну границю, то заключаємо її у прямокутник Π , і вводимо допоміжну функцію $\rho(\cdot)$, і визначаємо її наступним чином:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \in \Pi \setminus \Omega, \\ 1 & \text{для } x \in \Omega. \end{cases}$$

Тоді в задачі (3.1) функцією $c(x, \tau_i)$ будемо вважати функцію $c(x, \tau_i)\rho(x)$, визначену на Π і таку, яка дорівнює функції $c(x, \tau_i)$ на Ω .

Представимо наближений алгоритм розв'язання задачі про пошук радіуса N куль k -кратного c -кульового покриття множини, а також алгоритм розв'язання задачі про мінімальне k -кратне c -кульове покриття з розміщенням центрів куль. Наведемо результати деяких експериментів з обчислень найменшого радіусу кратного кульового покриття [178 – 180].

Алгоритм 3.1-К

Ініціалізація. Паралелепіпед Π покриваємо прямокутною сіткою з кроками $\Delta_j, j = 1, 2$; нехай $\bar{\Pi}$ – множина вузлів сітки. Задаємо розташування центрів $(\tau_1, \dots, \tau_N)$.

Крок 1. Для кожної точки x сітки $\bar{\Pi}$ будуємо масив відстаней до заданих центрів: $D(x) = (c(x, \tau_1), c(x, \tau_2), \dots, c(x, \tau_N))$.

Крок 2. Сортуюмо $D(x)$ за зростанням елементів для x з $\bar{\Pi}$ і вибираємо елемент, який стоїть на k -му місці відсортованого масиву відстаней (з порядковим номером k), позначимо цей елемент $c^k(x, \tau_{i_k})$.

Крок 3. Серед усіх відібраних елементів знаходимо найбільший:

$$\tilde{R} = \max_{x \in \bar{\Pi}} c^k(x, \tau_{i_k}).$$

Отримане максимальне значення є наближеним значенням радіусу кіл з центрами в точках $(\tau_1, \dots, \tau_N)$, які k -кратно покривають множину Ω .

Вочевидь, на однакових просторових сітках чисельні алгоритми, що реалізують обидва підходи, дають однакові результати. Та час роботи алгоритму **3.1-К** значно менший за час обчислення радіусу куль із заданими центрами, які k -кратно покривають множину Ω . Про це свідчить інформація, наведена в табл. 3.3, де представлено час розв'язання задачі k -кратне c -кульове покриття певною кількістю центрів одиничного квадрата $\Omega=[0,1] \times [0,1]$ у випадку, коли крок розбиття $\Delta_j = 0.005, j = 1, 2$.

Таблиця 3.3

Час роботи алгоритмів залежно від кількості центрів N і кратності покриття k

N	k	Час виконання алгоритму (мс) реалізації підходу	
		першого	другого
4	2	2,28	0,18
9	2	6,38	0,31
14	3	36,08	0,43
20	4	651,01	0,92
25	3	276,23	0,79

Враховуючи зазначену перевагу алгоритму **3.1-К**, саме його будемо надалі застосовувати в алгоритмах розв'язання задачі кратного покриття з розміщенням центрів куль.

Опишемо можливі варіанти чисельних алгоритмів розв'язання задачі (3.5) про оптимальне k -кратне покриття – пошуку координат центрів $\tau_1^*, \dots, \tau_N^*$, за яких мінімізується цільова функція

$$\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N) = \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x).$$

Вважатимемо, що Ω має просту структуру. Спочатку для обчислення субградієнта скористаємося формулами (3.6), (3.7). У другому алгоритмі для цього побудуємо k -кратну діаграму Вороного і реалізуємо формули (3.8) – (3.10).

Алгоритм 3.2-К

Ініціалізація. Ω покрити прямокутною сіткою з кроками $\Delta_j, j = 1, 2; \tilde{\Omega}$ – сукупність вузлів сітки на Ω . Задати крок чисельного диференціювання Δ . Задати початкове наближення центрів покриття $\tau^{(0)} = (\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)})$.

Обчислити величину

$$\hat{R}(\tau^{(0)}) = \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i^{(0)}) \lambda_i(x),$$

застосовуючи алгоритм **3.1-К** розв'язання задачі пошуку радіусу N куль, які утворюють k -кратне c -кульове покриття заданої множини Ω .

За формулами (3.6), (3.7) обчислити вектор-градієнт $g_{\hat{R}}(\tau)$ в точці $\tau^{(0)}$, задаємо $h_0 > 0$.

Крок 1. Обчислити

$$\tau^{(1)} = P_{\Omega}(\tau^{(0)} - h_0 g_{\hat{R}}(\tau^{(0)})),$$

P_{Ω} – оператор проєктування на множині Ω .

Перехід на другий крок.

Нехай після $m, m = 1, 2, \dots$, кроків знайдено вектор $\tau^{(m)} = (\tau_1^{(m)}, \dots, \tau_N^{(m)})$.

(m+1)-й крок:

1. Обчислити за відомими центрами $\tau_1^{(m)}, \dots, \tau_N^{(m)}$ за допомогою алгоритму

3.1-К величину

$$\hat{R}(\tau^{(m)}) = \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i^{(m)}) \lambda_i(x).$$

2. Обчислити $g_{\hat{R}}(\tau)$ за формулами (3.6), (3.7), коли $\tau = \tau^{(m)}$.

3. Провести (m+1)-й крок г-алгоритму в Н-формі [31] за ітераційною формулою

$$\tau^{(m)} = P_{\Omega} \left(\tau^{(m)} - h_m \frac{H_{m+1} g_{\hat{R}}(\tau^{(m)})}{\sqrt{(H_{m+1} g_{\hat{R}}(\tau^{(m)}), g_{\hat{R}}(\tau^{(m)})}} \right), \quad (3.12)$$

де H_{m+1} – матриця оператора розтягнення простору, яка перераховується наступним чином:

$$H_{m+1} = H_m + (1/\alpha^2 - 1) \frac{H_m \xi_m \xi_m^T H_m}{(H_m \xi_m, \xi_m)}, \quad \xi_m = g_{\hat{R}}(\tau^{(m)}) - g_{\hat{R}}(\tau^{(m-1)}). \quad (3.13)$$

Якщо внаслідок округлень розрахунків H_{m+1} втрачає властивість додатної визначеності, замінити її одиничною матрицею.

Крок h_m вибрати з умови:

$$\min_{h>0} \hat{R} \left(\tau^{(m)} - h \frac{H_{m+1} g_{\hat{R}}(\tau^{(m)})}{\sqrt{(H_{m+1} g_{\hat{R}}(\tau^{(m)}), g_{\hat{R}}(\tau^{(m)})}} \right). \quad (3.14)$$

4. Якщо умова

$$\|\tau^{(m+1)} - \tau^{(m)}\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (3.15)$$

виконується, то здійснити перехід до п. 5, інакше – до (m+2)-го кроку.

5. Вважати $\tau_* = \tau^{(l)}$, де l – номер ітерації, на якій виконується умова (3.15).

6. Обчислити значення мінімального радіусу покриття за формулою

$$\hat{R}(\tau_*) = \max_{x \in \tilde{\Omega}} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, \overline{N}} c(x, \tau_{*i}) \lambda_i(x)$$

за допомогою алгоритму **3.1-К**.

Алгоритм **3.2-К** описаний.

Алгоритм 3.3-К

Ініціалізація. Ω покрити прямокутною сіткою з кроком $\Delta_j, j = 1, 2; \tilde{\Omega}$ – сукупність її вузлів. Задати початкове розташування центрів покриття $\tau^{(0)} = (\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)})$.

Обчислити величину $R(\tau^{(0)}) = \max_{x \in \tilde{\Omega}} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, \overline{N}} c(x, \tau_i^{(0)}) \lambda_i(x)$ за

допомогою алгоритму **3.1-К**. Для кожного $i = 1, \dots, N$ обчислити

$$R_i(\tau^{(0)}) = \max_{T_m: i \in T_m} \max_{x \in V(\tilde{\tau}^{T_m})} c(x, \tau_i^{(0)}).$$

За формулою (3.10) побудувати субградієнтну множину $G_{R_i^{\tau_i}}^{\tau_i}(\tau^{(0)}) = \overline{\text{co}} \{g_c^{\tau_i}(\bar{x}, \tau^{(0)}), \bar{x}: c(\bar{x}, \tau_i) = R_i(\tau_i^{(0)})\}$, де $g_c^{\tau_i}(\bar{x}, \tau^{(0)})$ – узагальнений градієнт функції $c(x, \tau_i)$ в точці $\tau^{(0)}$.

Вибрати вектор $g_{\hat{R}}(\tau^{(0)}) \in G_{R_i^{\tau_i}}^{\tau_i}(\tau^{(0)})$. Задаємо $h_0 > 0$.

Крок 1. Знайти

$$\tau^{(1)} = P_{\Omega}(\tau^{(0)} - h_0 g_{\hat{R}}(\tau^{(0)})),$$

де P_{Ω} – оператор проєктування на множину Ω .

Перехід на крок 2.

Нехай $\tau^{(m)} = (\tau_1^{(m)}, \dots, \tau_N^{(m)})$ – поточне наближення координат центрів, отримане після $m, m = 1, 2, \dots$, кроків алгоритму.

Крок (m+1)-й.

1. За центрами $\tau_1^{(m)}, \dots, \tau_N^{(m)}$ за допомогою алгоритму **3.1-К** обчислити величину

$$R(\tau^{(m)}) = \max_{x \in \tilde{\Omega}} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, \overline{N}} c(x, \tau_i^{(m)}) \lambda_i(x),$$

використовуючи алгоритм **3.1-К** розв'язання задачі пошуку радіусу N куль, що утворюють k -кратне c -кульове покриття заданої множини Ω . При цьому

$$R_i(\tau^{(m)}) = \max_{T_m: i \in T_m} \max_{x \in V(\bar{\tau}^{T_m})} c(x, \tau_i^{(m)}), i = 1, \dots, N.$$

2. За формулою (3.10) побудувати субградієнтну множину $G_{R_i}^{\tau_i}(\tau^{(m)}) = \overline{co} \{g_c^{\tau_i}(\bar{x}, \tau^{(m)}), \bar{x}: c(\bar{x}, \tau_i) = R_i(\tau_i^{(m)})\}$, где $g_c^{\tau_i}(\bar{x}, \tau^{(m)})$ – узагальнений градієнт функції $c(x, \tau_i)$ в точці $\tau^{(m)}$.

4. Вибрати вектор $g_R(\tau^{(m)}) \in G_{R_i}^{\tau_i}(\tau^{(m)})$.

5. Реалізувати $(m+1)$ -й крок r -алгоритму [181] за ітераційними формулами (3.12), (3.13). Крок h_m вибрати з умови (3.14).

6. Якщо умова (3.15) виконується, то – перехід до п. 5, у протилежному випадку – до $(m+2)$ -го кроку.

7. Вважати $\tau_* = \tau^{(l)}$, де l – номер ітерації, коли істиною стала умова (3.15) завершення роботи алгоритму.

8. За допомогою алгоритму **3.1-К** обчислити значення мінімального радіусу покриття $\hat{R}(\tau_*) = \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_{*i}) \lambda_i(x)$.

Алгоритм **3.3-К** описаний.

3.1.4. Результати розв'язання тестових задач. Порівняльна характеристика розроблених алгоритмів та відомих підходів

Наведемо результати деяких обчислювальних експериментів у випадку, коли функція $c(x, \tau_i)$ є евклідовою метрикою. Оптимальні покриття одиничного квадрата, отримані з точністю $\epsilon=0.0001$ алгоритмом **3.2-К**, для $N = 2, 3, 4, 5, 8, 15$, наведено на рис. 3.4, a, b, v, z, d, e відповідно.

У табл. 3.4 наведено мінімальні радіуси однократного покриття в задачі (3.5) для відповідних значень N , отримані з тією самою точністю алгоритмом **3.2-К**, порівняно з оптимальними розв'язками, одержаними за допомогою алгоритму **3.1**.

Таблиця 3.4

Найменший радіус 1-кратного покриття одиничного квадрата

N	$R(\tau^*)$ (алгоритм 3.2-К)	$R(\tau^*)$ (алгоритм 3.1)	N	$R(\tau^*)$ (алгоритм 3.2-К)	$R(\tau^*)$ (алгоритм 3.1)
2	0,555	0,56	9	0,25	0,234
3	0,502	0,503	10	0,233	0,219
4	0,354	0,354	11	0,224	0,213
5	0,323	0,327	12	0,22	0,207
6	0,316	0,3	13	0,22	0,196
7	0,293	0,26	14	0,21	0,186
8	0,265	0,26	15	0,189	0,181

Варто зазначити, що результати, отримані алгоритмом **3.2-К**, узгоджуються з результатами, описаними у роботах [162], [169]. Незначна розбіжність у оптимальних значеннях радіусів покриття пояснюється, насамперед, похибкою алгоритму (наближене обчислення компонентів узагальненого градієнта цільової функції, дискретизація області тощо), а також обчислювальною похибкою.

Цільова функція задачі (3.5) є багатоекстремальною, про що свідчать результати наведених нижче та багатьох інших обчислювальних експериментів. За різних початкових наближень набору центрів $\tau^{(0)} = (\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)})$ можна отримати різні локальні розв'язки задачі (3.5).

На рис. 3.5 представлено двократне покриття одиничного квадрата 9-ма заданими центрами, отримане за допомогою алгоритму **3.1-К**.

На рис. 3.6 зображено відповідне оптимальне покриття квадрата, отримане алгоритмом **3.2-К**.

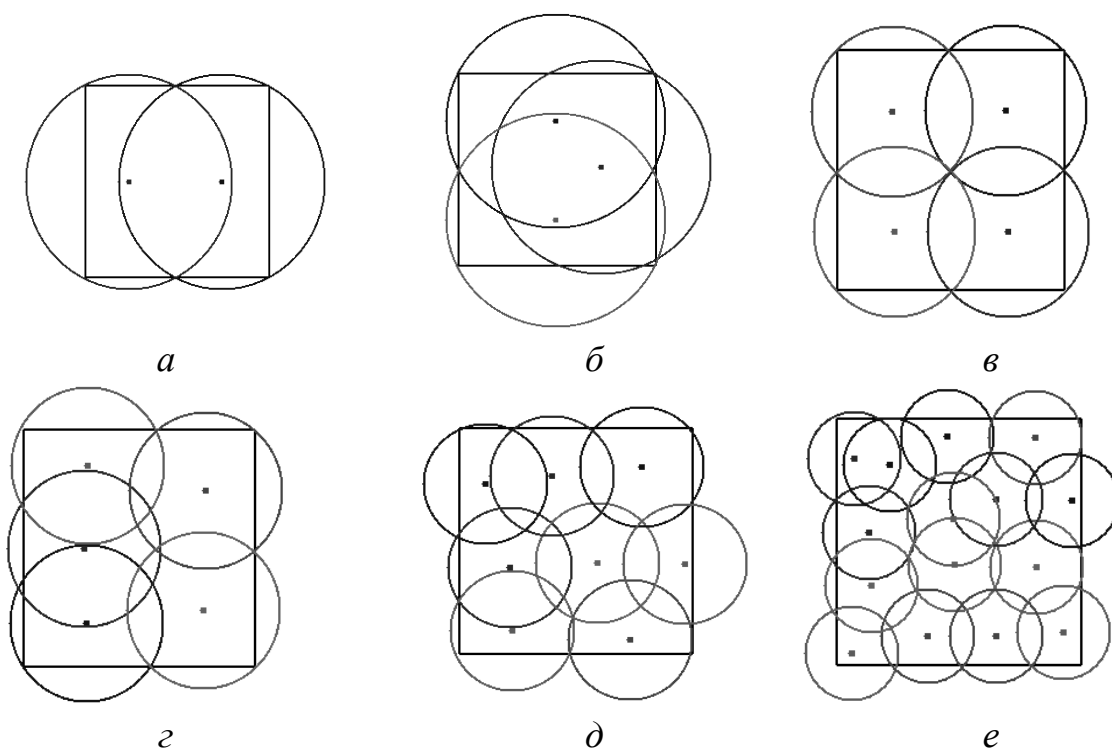


Рис. 3.4. Оптимальне однократне покриття одиничного квадрата, отримане алгоритмом **3.2-К**: $\|x\| = \|x\|_2$

Результати роботи алгоритму **3.2-К** з багатократного покриття різної кратності квадрата для 16 центрів показано на рис. 3.7. Там же зазначено й мінімальні радіуси покриття відповідної кратності.

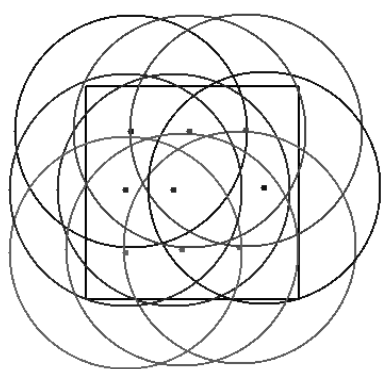


Рис. 3.5. Двократне кульове покриття квадрата для фіксованих дев'яти центрів, отримане алгоритмом **3.1-К**:
 $R = 0.549$

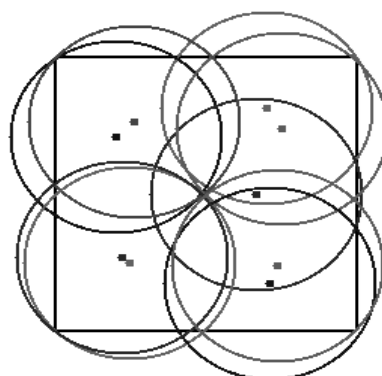


Рис. 3.6. Трикратне кульове покриття квадрата для оптимально розміщених дев'яти центрів алгоритмом **3.2-К**:
 $R = 0.354$

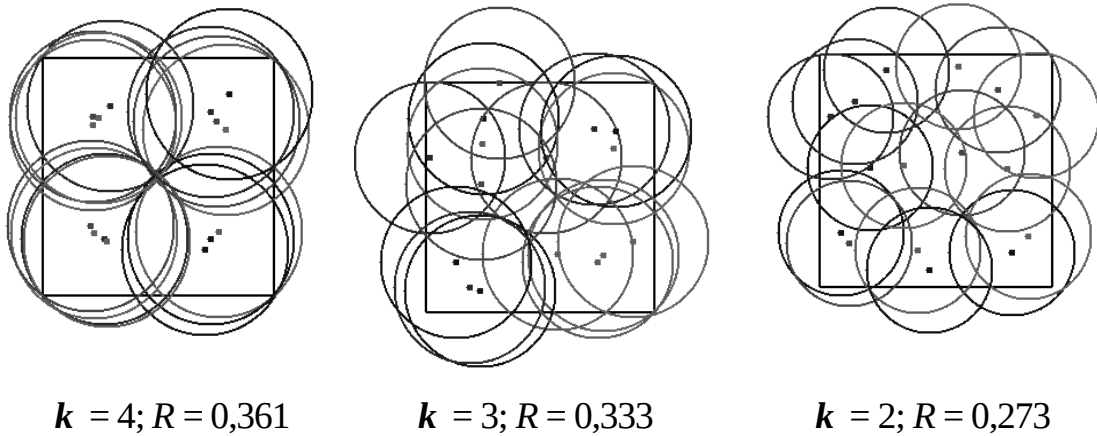


Рис. 3.7. Оптимальне k -кратне покриття одиничного квадрата $N=16$ кругами

Інші результати обчислювальних експериментів щодо реалізації алгоритмів **3.1-К** та **3.2-К** наведені в [175, 178].

Аналіз розрахунків дозволив знайти певні переваги та недосконалість алгоритмів. Насамперед, значення радіусу покриття і центрів, що його генерує, залежать від вихідних даних та параметрів алгоритму – початкового наближення координат центрів, величини кроку просторової сітки, кроку чисельного диференціювання при обчисленні компонент узагальненого градієнта.

Експериментальні дослідження показують, що для отримання радіусу близького до оптимального покриття алгоритмом **3.2-К** крок чисельного диференціювання повинен узгоджуватися з кроком дискретизації області, кількістю центрів та кратністю покриття. Аби уникнути цього, можна скористатися алгоритмом **3.3-К**, у якому під час обчислення компонент узагальненого градієнта цільової функції задачі (3.5) використовується k -кратна діаграма Вороного.

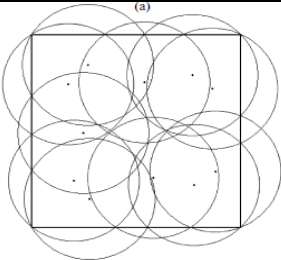
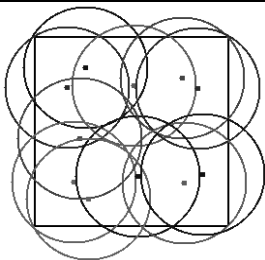
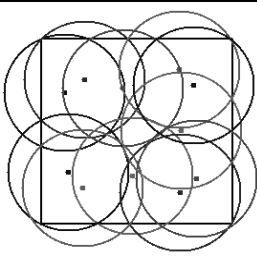
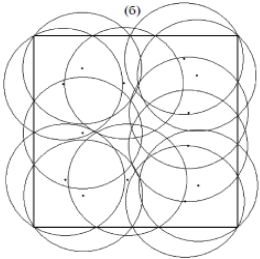
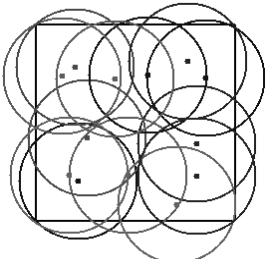
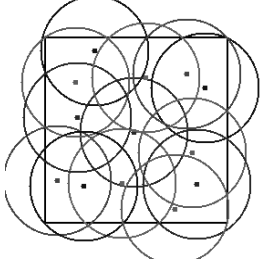
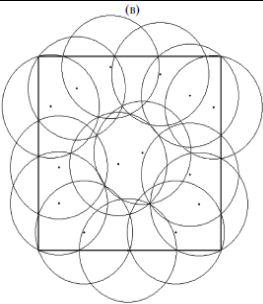
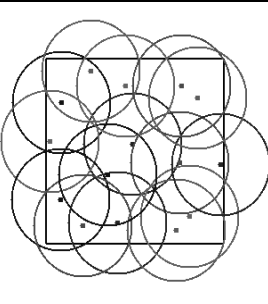
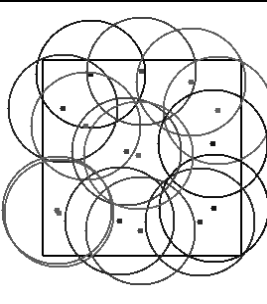
Практика розрахунків показує, що найкращих результатів у багатократному покритті множин можна досягти, якщо спочатку скористатися достатньо густою просторовою сіткою і на ній швидким алгоритмом **3.2-К** знайти оптимальне розташування центрів, а далі уточнити їх координати алгоритмом **3.3-К**.

В табл. 3.5, 3.6 наведено результати розв'язання задачі оптимального двократного покриття одиничного квадрата, отримані в [169] і за допомогою описаних вище підходів.

На рис. 3.8 представлені результати двократного покриття одиничного квадрата 19-ма колами, отримані за допомогою алгоритмів 3.2-К та 3.3-К. На рис. 3.9 показані багатократні оптимальні покриття за інших N та k .

Таблиця 3.5

Порівняльний аналіз результатів багатократного кульового покриття квадрата

N	Оптимальне 2-кратне покриття, отримане алгоритмом		
	запропонованим в [169]	3.2-К	3.3-К
11			
13			
15			

Таблиця 3.6

Мінімальний радіус 2-кратного покриття одиничного квадрата

N	$R(\tau^*)$ [169]	$R(\tau^*)$, обчислений	
		алгоритмом 3.2-К	алгоритмом 3.3-К
11	0,313	0,318	0,316
13	0,291	0,297	0,297
15	0,267	0,278	0,278
17	0,254	0,259	0,266

19	0,228	0,238	0,237
21	0,216	0,213	0,225

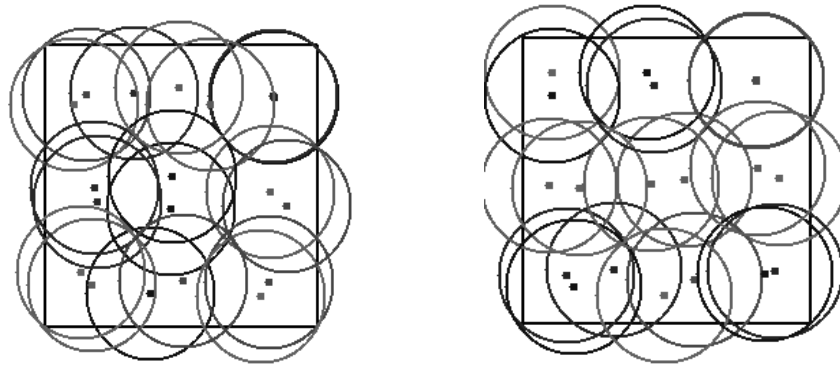
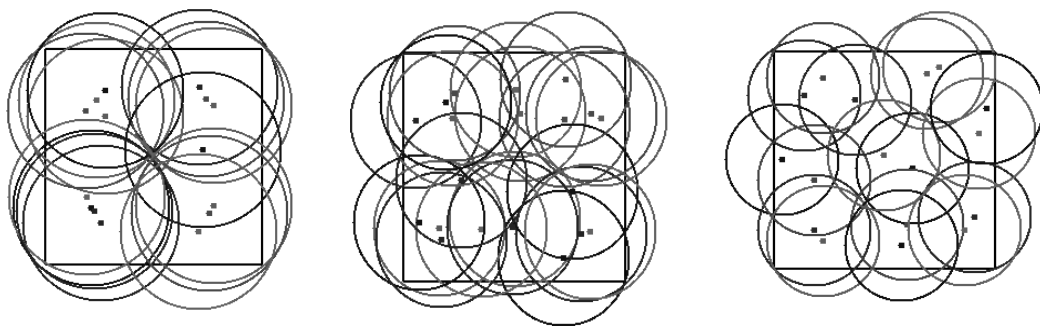


Рис. 3.8. Оптимальне 2-кратне покриття квадрата дев'ятнадцятьма
кругами, отримане з використанням: ліворуч – чисельного
диференціювання; праворуч – двократної діаграми Вороного



$N = 15, k = 3$

$N = 21, k = 3$

$N = 17, k = 2$

Рис. 3.9. k -кратне покриття одиничного квадрата N кругами, $\|x\| = \|x\|_2$

Як неважко помітити (див. рис. 3.8, 3.9), за певних величин N і k (приміром, коли вони мають спільний дільник або кратні один одному) два або й три центри можуть бути розташовані занадто близько один до одного, що є, вочевидь, оптимальним розміщенням, але на практиці такий варіант небажаний. Тому далі математична модель задачі про оптимальне багатократне кульове покриття буде уточнена деякою умовою регуляризації, що відповідає за неможливість «злипання» центрів.

3.1.5. Використання алгоритмів розв'язання задач мультиплексного розбиття множин для обчислення радіусу багатократного кульового покриття

Виконання алгоритму розв'язання задачі **A1-k** [180, 146, 148, 182, 183], запропонованого у попередньому розділі, передбачає можливість обчислювати і радіус покриття тої самої кратності для множини, що розбивається, як максимальну відстань у підмножині k -го порядку між центром і найвіддаленішою від нього точкою, а саме:

$$\bar{R} = \sup_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x), \quad (3.16)$$

де $\Lambda_N^k = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N): \lambda_i = 0 \vee 1, i = \overline{1, N}; \sum_{i=1}^N \lambda_i = k\}$.

Або на кожній ітерації субградієнтного методу розв'язання дискретизованого аналогу задачі про оптимальне багатократне кульове покриття можна застосовувати алгоритми оптимального мультиплексного розбиття множин при фіксованих центрах.

На рис. 3.10 представлені дуплексне розбиття квадрату $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ при $N=13$ фіксованих центрах з такими параметрами: попит однорідний, метрика евклідова, $\mathbf{a}_l = \mathbf{0}$, $\mathbf{w}_l = \mathbf{1}$, $l = \overline{1, N}$. Величина радіусу покриття в обох задачах $R = 0.4706$. Тут і далі на розбитті тонкою (червоною) лінією проведений шуканий радіус.

На рис. 3.11 наведено оптимальні триплексне і дуплексне розбиття квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$ з розміщенням 17-ти і 15-ти центрів відповідно. Радіус мінімального покриття дорівнює: $R = 0.33232$ і $R=0.2961$.

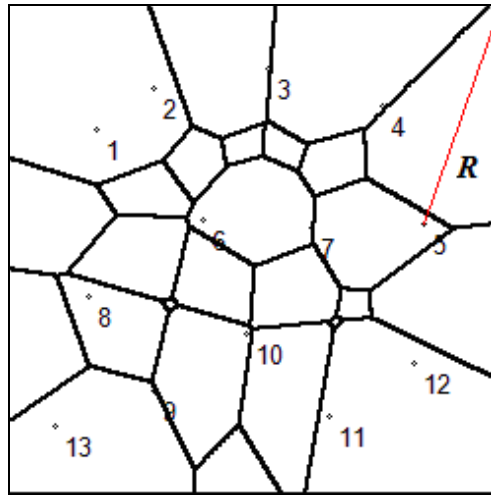
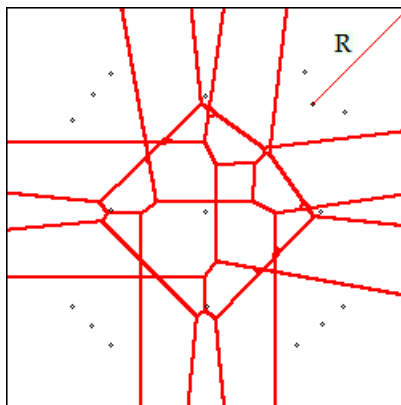
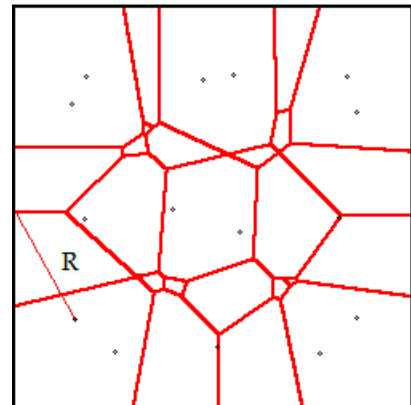


Рис. 3.10 Радіус двократного покриття і дуплексне розбиття квадрату при $N=11$ фіксованих центрах

Оптимально розташовані алгоритмами ОМРМ тринадцять центрів із зазначенням радіусу двократного покриття представлено на рис. 3.12. Тут ліворуч подано саме дуплексне розбиття множини, а праворуч – мінімальне двократне кульове її покриття, отримане в [126]. Обчислений радіус двократного покриття для наведених прикладів дорівнює $R=0,2961$, $R=0,2911$ відповідно.



$N = 17, k = 3$



$N = 15, k = 2$

Рис. 3.11 Розбиття квадрату k -го порядку для оптимально розміщених N центрів (тонка лінія – радіус мінімального покриття)

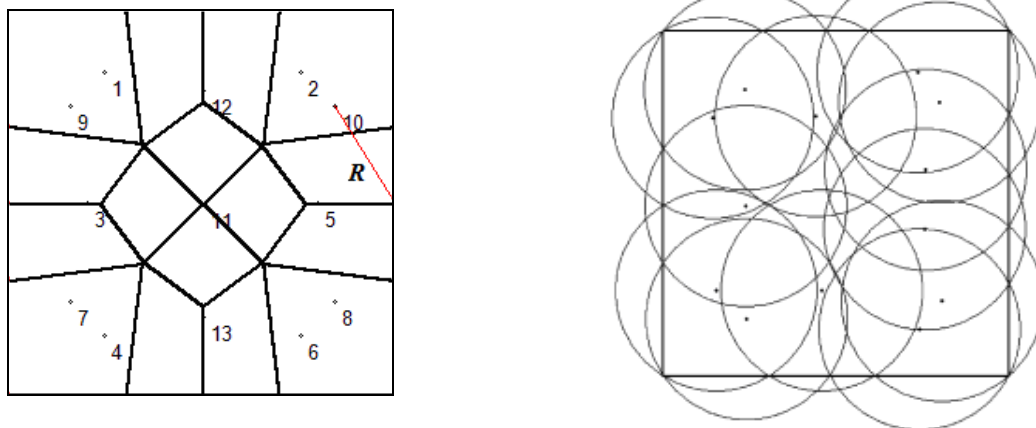


Рис. 3.12 Розбиття Ω 2-го порядку з оптимальним розміщенням 13 центрів (ліворуч) і відповідне мінімальне покриття (праворуч)

З урахуванням того, що алгоритм розв'язання задачі **A1-k** забезпечує пошук лише локального мінімуму негладкої функції, а сама задача є багатоекстремальною, позаяк можна отримати різні локальні розв'язки задач ОМРМ за різних початкових розташувань центрів. Звичайно, й радіус багатократного покриття кулями з центри у розв'язках вказаної задачі можуть відрізнятися один від одного.

У випадку фіксованих центрів значення радіусу багатократного покриття, отримані при розв'язанні задач **A1-k** та (3.4) збігаються. Коли ж в задачі ОМРМ центри потрібно розмістити, така властивість не характерна. Дослідимо форму цільового функціоналу оптимізаційної задачі про мультиплексне розбиття множини з пошуком координат центрів, аби отримати однакові (за величиною радіусу покриття) розв'язки задач (3.4) і **A1-k**. Вивчимо також питання, якими при цьому мають бути множина, що розбивається, та метрика на ній?

Виявляється, такою модифікацією функціоналу задачі **A2-k**, який описує якість мультиплексного розбиття, є наступний вираз [182]:

$$F_R(\bar{\omega}, \tau^N) = \max_{l=1, L} \sup_{x \in \Omega_{\sigma_l}} \max_{i \in \sigma_l} (c(x, \tau_i)/w_i + a_i) \rho(x).$$

Неважко помітити, якщо в $F_R(\bar{\omega}, \tau^N)$ обрати евклідову метрику,

однорідний попит і решту параметрів: $w_i = 1, a_i = 0$, для $i = \overline{1, N}$, то задача **A2-k** з таким критерієм мультиплексного розбиття стає еквівалентною до задачі (3.4) пошуку покриття множини заданим числом куль мінімального радіусу.

Отже, отримано математичну формалізацію задачі оптимального багатократного кульового покриття і задачі оптимального розміщення об'єктів спостереження за певною територією, яку можна надалі узагальнювати за рахунок додавання певних умов.

Дослідження задач оптимального розміщення об'єктів із одночасним зонуванням території на основі теорії і методів задач мультиплексного розбиття континуальних множин є доцільним, позаяк останні надають змогу оцінювати не тільки радіус покриття, але й так звану «потужність» центру, котрий розташовується. Особливо, якщо розміщуваний об'єкт є центром первинної медичної допомоги або рятувальним пунктом системи екстреної допомоги. Його потужність може бути визначена на базі інформації про розмір території, що закріплюється за центром, і густиною населення на ній, з урахуванням кратності розбиття, а саме:

$$Capacity(\tau_i) = \sum_{\substack{l=1 \\ l: i \in \sigma_l}}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x) dx \quad i = \overline{1, N}.$$

де γ_i^l такі, що для всіх $i = \overline{1, N}$, $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, \dots, j_k^l\} \in M(N, k)$, $l = \overline{1, L}$, мають місце умови: $0 \leq \gamma_i^l \leq 1$, $\gamma_{j_1^l}^l + \gamma_{j_2^l}^l + \dots + \gamma_{j_k^l}^l = 1$.

Можливість оцінювати охоплення території кожним з розміщуваних центрів проілюстрована у попередньому розділі (див. табл. 2.4).

3.2. Оптимальне розміщення рятувальних об'єктів з урахуванням можливості якнайшвидшого надання допомоги мешканцям підлеглих територій

3.2.1. Постановка задачі та її математична формалізація

Розглянемо проблему розміщення пунктів первинної медичної допомоги або аварійних служб з визначенням зон їхньої відповідальності. При цьому потрібно мінімізувати час реакції на НС, тобто центри мають бути розміщені так, аби відповідна послуга надавалась при необхідності у найкоротший термін для найвіддаленіших мешканців регіону. Аби забезпечити швидкий (гарантований) доступ до допомоги для всіх мешканців, допустимо перекриття зон.

Будемо використовувати такі позначення:

$\Omega \subset E_2$ – заданий регіон;

$\rho(x)$, $x \in \Omega$ – невід'ємна функція, що описує щільність розподілу мешканців на території регіону Ω ;

N – кількість рятувальних служб, які потрібно розташувати у регіоні Ω ;

$\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}) \in \Omega$, для усіх $i = 1, \dots, N$, – координати цих об'єктів (далі центрів);

$N = \{1, 2, \dots, N\}$ – набір індексів всіх центрів;

k – кратність зонування, яка визначає на допомогу якого максимального числа служб може розраховувати споживач послуги;

$M(N, k)$ – множина всіх k -елементних сукупностей з N , $|M(N, k)| = L$;

$\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, \dots, j_k^l\}$, $l = \overline{1, L}$ – елементи множини $M(N, k)$;

Ω_{σ_l} – підмножина множини Ω , $l = \overline{1, L}$, котра відповідає σ_l з $M(N, k)$ або (що є тим самим) набору центрів $\{\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, \dots, \tau_{j_k^l}\}$;

$\Sigma_{\Omega}^{N,k}$ – клас усіх розбиттів на зони k -го порядку множини Ω ;

$c(x, \tau_i)/w_i$ – час, за який можна дістатися від центру τ_i до точки $x \in \Omega$,
 $c(x, \tau_i)$ – метрика, що визначає відстань між двома точками, $1/w_i > 0$ –
 коефіцієнт пропорційності;

a_i – умовна вартість надання послуги центром τ_i , розрахована на одного
 потенційного клієнта (постраждалого, користувача);

$b_1, b_2, \dots, b_N$ – так звані «потужності» рятувальних центрів, тобто
 максимально можлива кількість споживачів, на яку розрахований відповідний
 центр.

Математичну формалізацію задачі виконаємо з використанням
 елементів теорії неперервних задач мультиплексного розбиття множин.

Задача AR- k . Потрібно

$$F_R(\bar{\omega}, \tau^N) = \max_{l=1, \bar{L}} \sup_{x \in \Omega_{\sigma_l}} \max_{i \in \sigma_l} (c(x, \tau_i)/w_i + a_i) \rho(x) \rightarrow \min_{\substack{\bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^{N,k} \\ \tau^N \in \Omega^N}}, \quad (3.17)$$

за умов

$$Capacity(\tau_i) = b_i, \quad i = \overline{1, p}, Capacity(\tau_i) \leq b_i, \quad i = \overline{p+1, N}, \quad (3.18)$$

де $Capacity(\tau_i) = \sum_{l=1}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x) dx$, $i = \overline{1, N}$, а коефіцієнти γ_i^l залежать

певним чином від потужностей центрів і для всіх $i = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, L}$:

$$0 \leq \gamma_i^l \leq 1, \quad \gamma_{j_1}^l + \gamma_{j_2}^l + \dots + \gamma_{j_k}^l = 1. \quad (3.19)$$

Пара $(\bar{\omega}^*, \tau_*^N) = (\{\Omega_{\sigma_1}^*, \Omega_{\sigma_2}^*, \dots, \Omega_{\sigma_L}^*\}, \{\tau_1^*, \tau_2^*, \dots, \tau_N^*\})$, на якій функціонал
 $F_R(\bar{\omega}, \tau^N)$ є найменшим і яка задовольняє умову (3.18), – це *оптимальний
 розв'язок задачі AR- k .*

3.2.2. Дискретно-неперервний аналог задачі і її узагальнення

Припустимо, що аварійно-рятувальні служби можна розмістити лише на певній частині регіону. Нехай Ω – обмежена, замкнена множина у просторі E_2 , $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}) \in T$, $T \subseteq \Omega$, для усіх $i = 1, \dots, N$, – деякі точки, які вважатимемо місцями розміщення центрів (їх потрібно знайти).

Якщо $T \equiv \Omega$, отримаємо задачу (3.5). У випадку, коли T – скінченна дискретна підмножина множини Ω , задача носить частково комбінаторний характер, адже з усіх можливих місць розташування центрів (позначимо таку кількість M), потрібно виділити такі N , $N < M$, за яких функціонал (3.4) досягав би найменшого значення. Уточнимо постановку такої задачі.

Нехай множина T – скінченна дискретна підмножина множини Ω , $|T| = M$, $v_m \in T$, $m = 1, \dots, M$ – можливі місця розміщення рятувальних об'єктів. Введемо до розгляду наступні змінні:

$$\beta_{im} = \begin{cases} 1, & \text{якщо центр } \tau_i \text{ розміщується в точці } v_m, \\ 0 & \text{в іншому випадку,} \end{cases} \quad (3.20)$$

які задовольняють умови

$$\sum_{i=1}^N \beta_{im} \leq 1 \quad \forall m = \overline{1, M}, \quad (3.21)$$

$$\sum_{m=1}^M \beta_{im} = 1 \quad \forall i = \overline{1, N}. \quad (3.22)$$

Умова (3.21) означає, що в кожному відомому можливому місці $v_m \in T$, $m = 1, \dots, M$ може бути розташовано не більше одного рятувального об'єкту, а обмеження (3.22) передбачає обов'язкове розміщення N центрів. З урахуванням (3.21), (3.22), умову (3.20) можна записати наступним чином:

$$\tau_i = \sum_{m=1}^M \beta_{im} v_m. \quad (3.23)$$

(3.23) слід розглядати по координатно.

Якщо кожен з об'єктів $\tau_i, i = \overline{1, N}$, характеризується певними параметрами, що відрізняють їх один від одного, так само, як і місця можливого розміщення цих об'єктів можуть мати різні властивості, то форма представлення (3.23) через матрицю додаткових змінних $\beta_{im}, i = \overline{1, N}, m = \overline{1, M}$ є обов'язковою.

Якщо ж вважати рятувальні служби однаковими об'єктами (далі будемо розглядати цей випадок), то можна уникнути введення додаткових змінних β_{im} і зменшити розмірність моделі. Для цього позначимо $y_m = \sum_{i=1}^N \beta_{im}$. Нові змінні є бінарними, для яких $y_m = 1$, якщо центр розміщений в точці $v_m \in T$, і $y_m = 0$, якщо v_m залишилася незадіяною, $m = 1, \dots, M$. Оскільки розміщуються лише N центрів, то $\sum_{m=1}^M y_m = N$.

Для кожного $x \in \Omega$ введемо до розгляду вектор $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_M(x))$, компоненти якого дорівнюватимуть 0 або 1 за таким правилом:

$$\lambda_m(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x - \text{у зоні відповідальності центру } v_m, \\ 0 & \text{у протилежному випадку, } m = \overline{1, M}, \end{cases} \quad (3.24)$$

і задовольнятимуть наступні умови:

$$\lambda_m(x) \leq y_m \quad \forall m = \overline{1, M}, \quad (3.25)$$

$$\sum_{m=1}^M \lambda_m(x) = k \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.26)$$

Будемо говорити, що $\lambda(\cdot)$ відповідає вектору y , якщо для кожного $x \in \Omega$ виконується нерівність (3.25). Остання означає неможливість задовольнити потреби x , якщо в точці v_m ніяка рятувальна служба не розміщена. Умова (3.26) дозволяє точці x бути в зонах уваги k центрів.

Отже, задача оптимального вибору центрів τ_i з множини T і визначення зон їх відповідальності в регіоні Ω з метою мінімізації максимальної відстані між мешканцями регіону та k найближчими центрами математично

записується у такий спосіб: знайти вектор $y^* = \{y_m^*\}_{m=\overline{1,M}}$, і відповідну вектор-функцію $\lambda^*(\cdot)$, за яких

$$\bar{R}(y, \lambda(\cdot)) = \sup_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_M^k} \max_{m=\overline{1,M}} c(x, v_m) \lambda_m(x) \rightarrow \min \quad (3.27)$$

і виконуються умови:

$$\sum_{m=1}^M y_m = N, \quad (3.28)$$

$$\sum_{m=1}^M \lambda_m(x) = k \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.29)$$

$$\lambda_m(x) \leq y_m \quad \forall m = \overline{1, M}, \quad \forall x \in \Omega; \quad (3.30)$$

$$\lambda_m(x) = 0 \vee 1, \quad m = \overline{1, M}; \quad \forall x \in \Omega; \quad (3.31)$$

$$y_m = 0 \vee 1, \quad m = \overline{1, M}, \quad (3.32)$$

$$v_m \in T, \quad m = 1, \dots, M. \quad (3.33)$$

Задача (3.27) – (3.33) має такі особливості: 1) передбачає можливість перекриття зон обслуговування у разі неможливості надання допомоги найближчим центром через певні обставини; 2) є частково комбінаторною і частково неперервною за своєю природою, оскільки з усіх M можливих місць розташувань центрів ми вибираємо лише N тих, для яких функціонал досягає найменшого значення, а потужність охоплених зон їхньої відповідальності є континуальною.

Якщо припустити, що відкриття центру τ_i в точці v_m коштуватиме уряду витрат a_m , то можна додатково мінімізувати й загальні витрати на організацію усіх центрів. Тоді задачу можна доповнити вартісним критерієм якості розміщення центрів, записаним наступним чином:

$$I(y) = \sum_{m=1}^M a_m y_m. \quad (3.34)$$

І ставиться задача: знайти такі $y^* = \{y_m^*\}_{m=\overline{1,M}}$, і $\lambda^*(\cdot)$, які мінімізують критерії (3.27) і (3.34) за умов (3.28) – (3.33).

За допомогою лінійної згортки критеріїв можна перейти до однокритеріальної задачі оптимізації:

$$Q(y, \lambda(\cdot)) = \alpha_1 \hat{R}(y, \lambda(\cdot)) + \alpha_2 \hat{I}(y) \rightarrow \min \text{ за умов (3.28) – (3.33).}$$

Тут коефіцієнти $\alpha_1 \geq 0$ і $\alpha_2 \geq 0$, такі що $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, задають пріоритет відповідного критерію, $\hat{R}(y, \lambda(\cdot))$, $\hat{I}(y)$ – нормовані безрозмірні критерії.

Але нормалізація критеріїв передбачає розв'язання окремо чотирьох однокритеріальних задач для пошуку найкращих та найгірших значень функціоналів на допустимій множині розв'язків. Аби уникнути необхідності застосування методів багатокритеріальної оптимізації задачу можна записати у вигляді задачі оптимального покриття з розміщенням центрів на скінченній множині точок з додатковим обмеженням на сумарні витрати.

Припустимо, що на відкриття центрів уряд виділяє певні кошти в розмірі A ум. грош. од. Тоді замість критерію (3.34) має бути враховано наступне обмеження:

$$\sum_{m=1}^M a_m y_m \leq A. \quad (3.35)$$

Ставиться задача: знайти такі $y^* = \{y_m^*\}_{m=\overline{1,M}}$, і $\lambda^*(x)$, $x \in \Omega$, за яких функціонал (3.27) набуває мінімального значення за умов (3.28) – (3.33), (3.35).

У припущенні, що кількість N центрів $\tau_1, \dots, \tau_N$ може не бути заданою заздалегідь, можна сформулювати і задачу про пошук мінімальної за кількістю сукупність центрів k -кратного покриття (див. п. 3.1.2).

3.2.3. Опис алгоритму розв'язання задачі оптимального вибору місць розміщення рятувальних об'єктів з одночасним зонуванням території

Для побудови алгоритму розв'язання N центрів на скінченній множині T місць з мінімальним радіусом k -кратного покриття множини Ω введемо деякі позначення. Нехай $G(M, N)$ – множина всіх N – елементних підмножин множини

індексів M , $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, \dots, j_N^l\}$, $l = \overline{1, L}$, – елементи множини $G(M, N)$, $L = |G(M, N)| = C_M^N$. Позначимо y^{σ_l} – вектор y з наступними компонентами:

$$y_m^{\sigma_l} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } m \in \sigma_l, \\ 0 & \text{у протилежному випадку, } m = \overline{1, M}. \end{cases} \quad (3.36)$$

Тоді переформулюємо задачу (3.27) – (3.33), (3.35) так: знайти комбінацію $\sigma^* \in G(M, N)$, відповідний вектор $y^* = y^{\sigma^*}$ та вектор-функцію $\lambda^*(x)$, $x \in \Omega$, які мінімізують функціонал (3.27) і задовольняють умови:

$$\sum_{m=1}^M \lambda_m(x) = k, \forall x \in \Omega, \quad (3.37)$$

$$\lambda_m(x) \leq y_m^{\sigma} \quad \forall m = \overline{1, M}, \forall x \in \Omega; \quad (3.38)$$

$$\sum_{m=1}^M a_m y_m^{\sigma} \leq A, \quad (3.39)$$

$$\lambda_m(x) = 0 \vee 1, \quad m = \overline{1, M}, \forall x \in \Omega; \quad (3.40)$$

$$\sigma \in G(M, N); \quad (3.41)$$

$$v_m \in T, \quad m = 1, \dots, M. \quad (3.42)$$

Якщо множина Ω має складну форму, покриваємо її прямокутником Π зі сторонами, паралельними осям декартової системи координат, і вводимо функцію $\rho(x)$, визначену на Π , таку що

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & \text{для } x \in \Pi \setminus \Omega, \\ 1, & \text{для } x \in \Omega, \end{cases}$$

і тоді в функціоналі (3.27) замість $c(x, \tau_i)$ буде використовуватися добуток $c(x, \tau_i)\rho(x)$, визначений на Π .

Наведемо наближений алгоритм розв'язання задачі (3.27), (3.36) – (3.42) у припущенні, що існує хоча б одна комбінація індексів $\sigma \in G(M, N)$, для якої виконується нерівність (3.39). У цьому випадку задача є розв'язною.

Алгоритм ДС-К Процедура розв'язування, заснована на дискретизації покритої області, з розміщенням об'єктів на скінченній множині точок

Введення $T = \{v_m\}_{m=1, \dots, M}$, a_m , $m = 1, \dots, M$; h_1, h_2 – крок дискретизації

$$R^* = 10e15$$

- 1: Дискретизуємо Π ; $\tilde{\Pi}$ – множина вузлів сітки
- 2: для $l = \overline{1, L}$ виконувати
- 3: Генеруємо комбінацію $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, \dots, j_N^l\}$
- 4: Обчислюємо y^{σ_l} за формулою (3.36)
- 5: якщо $\sum_{m \in g_l} a_m \leq A$ то
- 6: $\tau_i = v_{j_i^l}^l, i = \overline{1, N}$
- 7: $R^l = -1$
- 8: для кожного $x \in \tilde{\Pi}$ виконувати
- 9: $\lambda_m(x) = 0 \quad \forall m = \overline{1, M}$
- 10: Обчислюємо вектор відстаней $D^l(x) \leftarrow (c(x, \tau_1), \dots, c(x, \tau_N))$
- 11: $D^{l, sort}(x) \leftarrow D^l(x)$, – сортований за зростанням вектор; $\sigma_l^{sort}(x)$
– комбінація σ_l , сортована відповідно вектору $D^{l, sort}(x)$
- 12: $Rkc(x) \leftarrow D_k^{l, sort}$
- 13: для $m = \overline{1, M}$ виконувати
- 14: якщо $m \in \sigma_l^{sort}[1; k]$ то
- 15: $\lambda_m(x) = 1$
- 16: кінець якщо
- 17: кінець для
- 18: якщо $R^l < Rkc(x)$ то
- 19: $R^l = Rkc(x)$
- 20: кінець якщо
- 21: кінець для
- 22: якщо $R^* > R^l$ то
- 23: $R^* := R^l$
- 24: $\tau^* := \tau$
- 25: кінець якщо
- 26: кінець якщо
- 27: кінець для

28: **для** кожного $x \in \tilde{P}$ **виконувати**

29: Обчислюємо $D^l(x) \leftarrow (c(x, \tau_1^*), c(x, \tau_2^*), \dots, c(x, \tau_N^*))$

30: $D^{l, sort}(x) \leftarrow D^l(x)$, сортований за зростанням елементів; $\sigma_l^{sort}(x)$ –
відповідно сортована комбінація σ_l

31: **для** $m = \overline{1, M}$ **виконувати**

32: **якщо** $m \in \sigma_l^{sort}[1; k]$ **то**

33: $\lambda_m(x) = 1$

34: **кінець якщо**

35: **кінець для**

виведення: $R^*; \tau^*; \lambda(x), x \in \tilde{P}$

3.2.4. Результати розв'язання модельних задач оптимального вибору місць розміщення центрів гуманітарної допомоги з одночасним розбиттям території на зони відповідальності центрів

Продемонструємо роботу алгоритму на наступній модельній задачі. Припустимо, що в одному з адміністративних районів деякого міста необхідно розташувати центри гуманітарної допомоги або логістичні хаби (ЛХ) і визначити для кожного з них зону відповідальності, аби мінімізувати відстань від центру до найвіддаленішої точки з закріпленої за ним території. Ці центри можуть розташовуватися лише на певних об'єктах або місцях, які визначені не тільки їх координатами, але й вартістю організації в них ЛХ. Кількість потенційних місць більша за кількість центрів, які потрібно розмістити.

Розглянемо випадки багатократного покриття території та поділу її на зони обслуговування центрів з метою забезпечення можливості надання оперативної допомоги мешканцю регіону, навіть якщо найближчий центр з якихось причин не може це зробити.

На рис. 3.13 наведені умовні границі житлової забудови, чим темнішим

є район, тим густонаселеною є територія. Хоча щільність населення в моделі, що досліджується, не є важливою, вона буде актуальною для вирішення проблем охоплення та розміщення центрів з обмеженими можливостями. На рис. 3.13 показано 15 місць можливого розміщення ЛХ. Оптимальний вибір 9 з них разом із закріпленими за ними територіями продемонстровано на рис. 3.14. Тут і далі розташовані центри виділено бірюзовим кольором поверх заданих.

Рис. 3.15, а та рис. 3.15, б показують результати 2-покриття і 3-покриття області, утвореної 11-ма центрами, вибраними з 17 заданих. Праворуч від охопленої та розділеної області вказано відповідність кольору зони та номерів $([i, j])$ або $[i, j, k])$ центрів, що відповідають за обслуговування цієї зони.

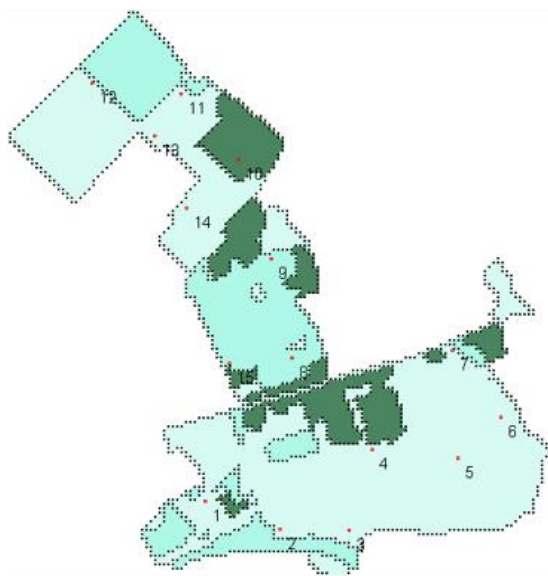


Рис. 3.13 Обмежена територія із зазначеними місцями можливого розташування центрів

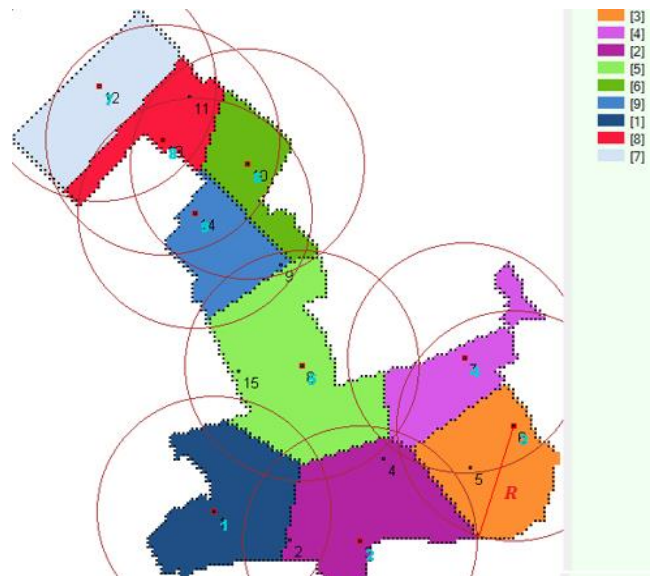


Рис. 3.14 Оптимальне покриття зонами відповідальності 9-ти центрів, вибраних з 15 можливих. с-метрика – Евклідова

Результати покриття території, котрі представлені на рис. 3.14, 3.15, відповідають випадку, коли для обчислення відстані між двома точками використовується евклідова метрика. Це доцільно, наприклад, якщо розміщені гуманітарні центри доставляють вантаж дронами, або коли команда допомоги добирається до найдалшої точки на вертольоті.

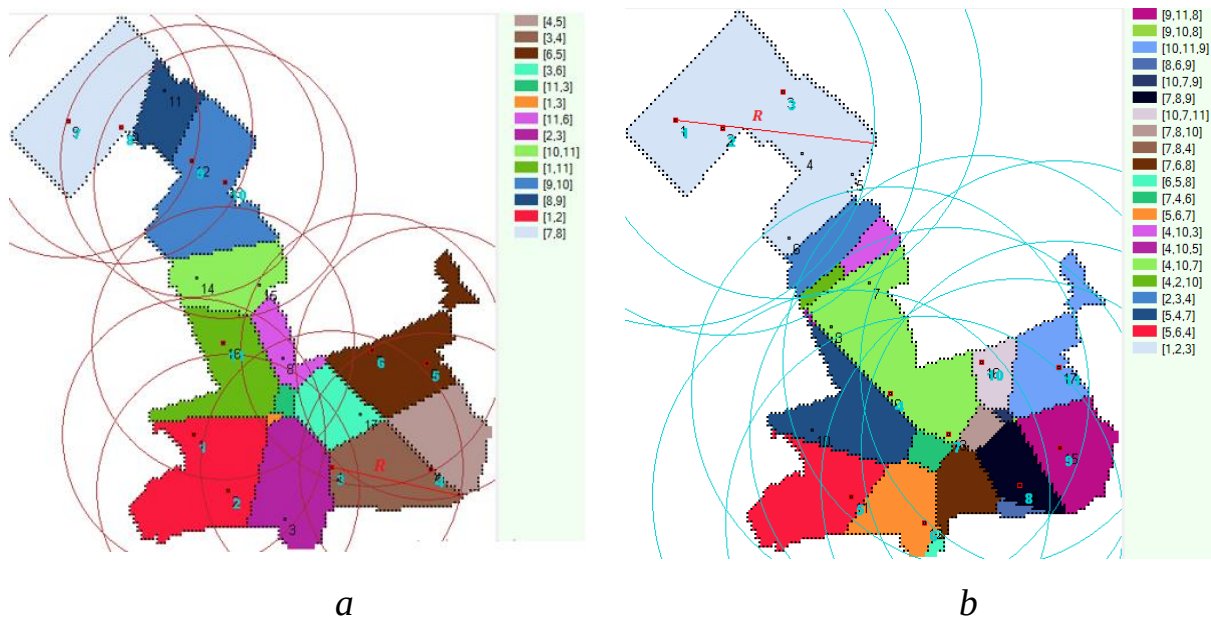


Рис. 3.15 Оптимальне k -кратне покриття території зонами відповідальності 11 центрів, вибраних з 17 потенційних точок: а) $k = 2$; б) $k = 3$

Дослідження, проведені в [173], свідчать про те, що для теоретичного опису відстані між двома точками в межах міста, найкраще підходить l_1 -метрика. Тому на рис. 3.16 представлено однократне та 2-кратне покриття області, згенероване 10-тю центрами, розташованими на наборі з 15 точок, з використанням l_1 -метрики.

Якщо для обчислення відстані між будь-якими двома точками в межах міста необхідно враховувати реальні автотранспортні комунікації та під'їзні шляхи до міста, то, безсумнівно, слід застосовувати сучасні ГІС-технології.

В усіх наведених прикладах a_i згенеровані випадково з множини $\{1,2,3,4\}$ для кожного $i = \overline{1, N}$; $A = 2N$.

Приклади багатократного покриття іншої області з розміщенням центрів на скінченній множині точок наведені на рис. 3.17, 3.18.

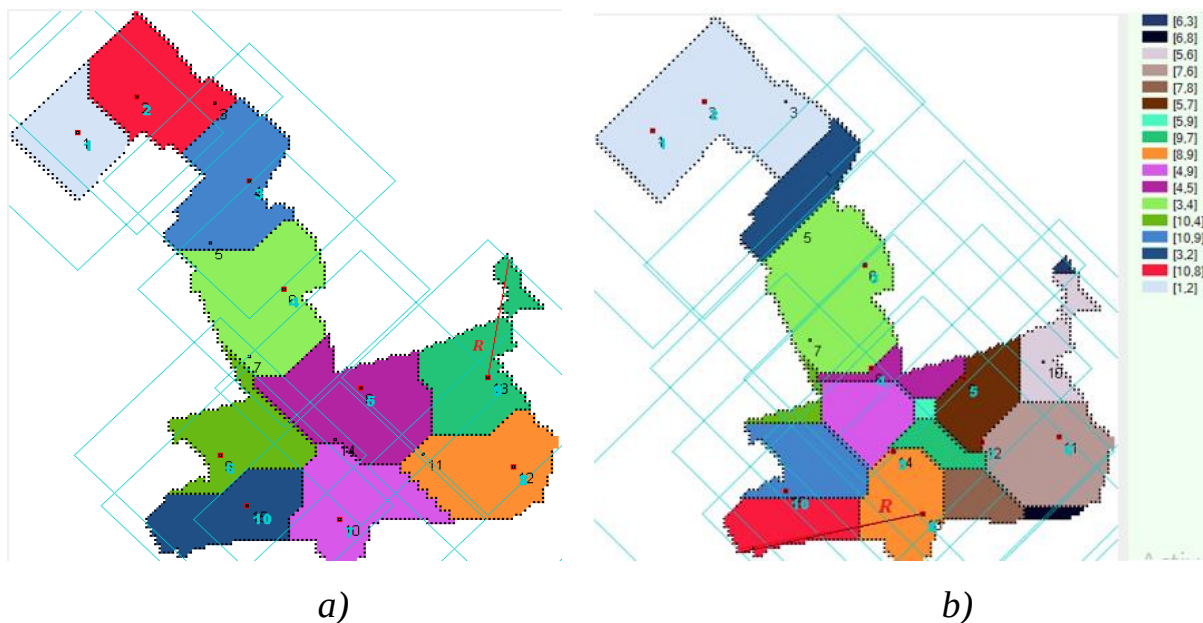


Рис. 3.16 Мінімальне k -кратне покриття зонами відповідальності 10-ти центрів, вибраних з 15 заданих, метрика Манхеттенська: а) $k = 1$; б) $k = 2$

Усі рисунки свідчать, чим більшою є кратність покриття, тим більший його радіус.

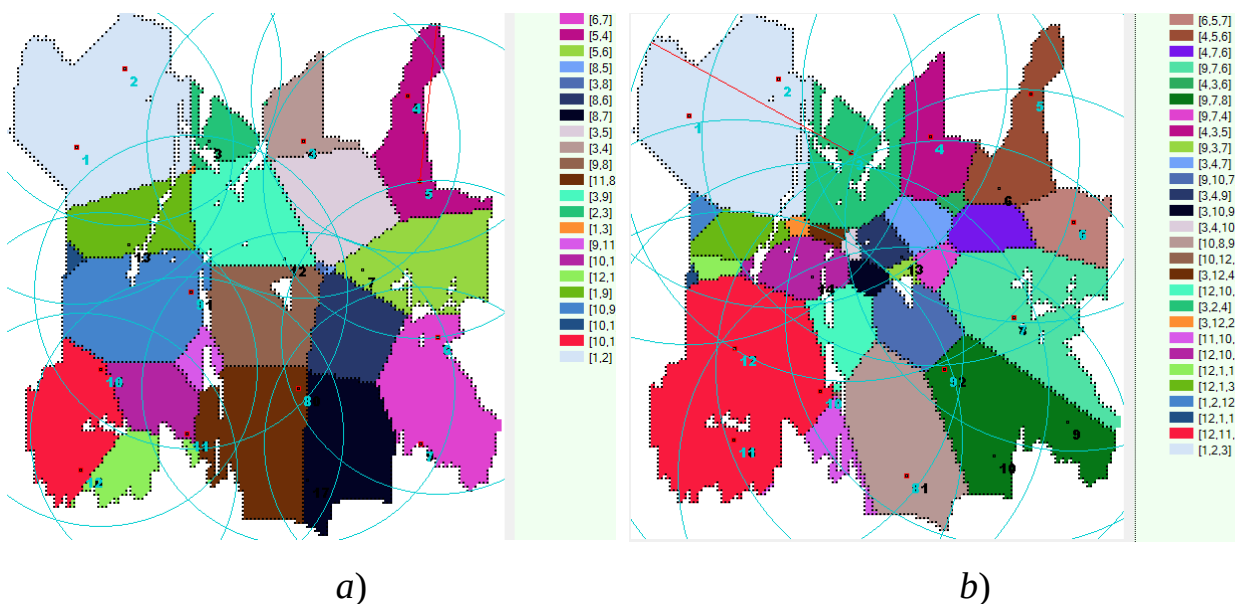


Рис. 3.17. Оптимальне k -кратне покриття і розбиття регіону на зони відповідальності 11 центрів, вибраних з 17 відомих: а) $k = 2$; б) $k = 3$

Та хоча час для надання допомоги найвіддаленішій точці може

збільшитися, шанси отримати допомогу також збільшуються за рахунок багатократності покриття регіону зонами відповідальності центрів.

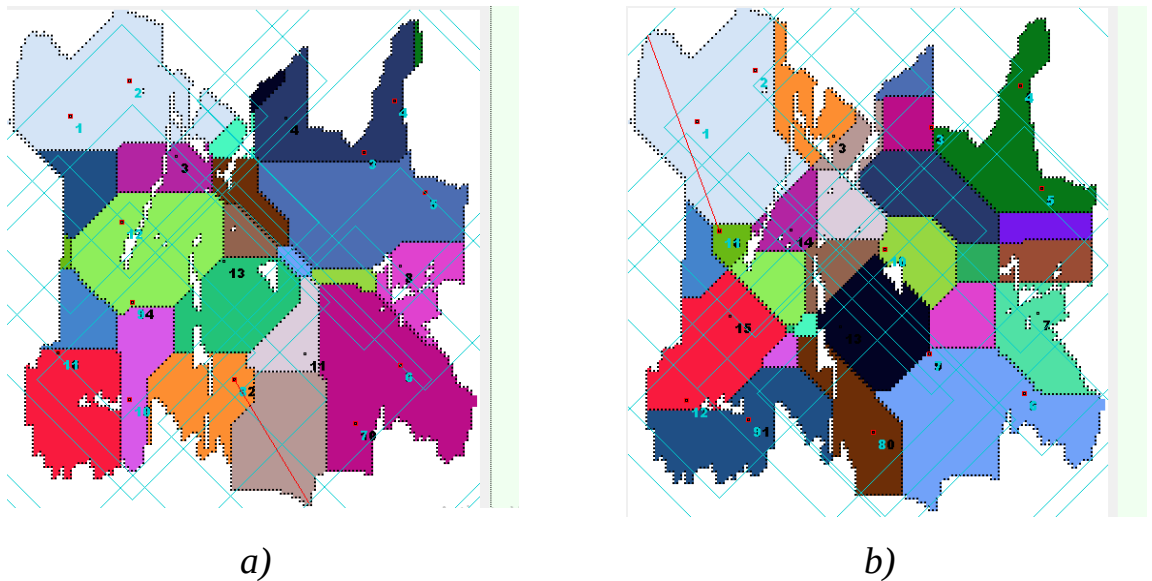


Рис. 3.18 Оптимальне k -кратне покриття (Манхеттенська метрика) і розбиття регіону на зони відповідальності 11 центрів, вибраних з 17 відомих:

a) $k = 2$; b) $k = 3$

Отже, представлений алгоритм зонування території з одночасним розміщенням центрів (гуманітарної чи медичної) дозволяє, по-перше, враховувати ті ситуації, коли найближчий до клієнта центр зайнятий, не може надати допомогу, і тоді інший ближній центр отримує своє призначення. По-друге, за чисельністю населення, яку охоплює виділена територія для того чи іншого центру, можна оцінити спроможність останнього, розрахувавши сили і засоби, якими він має бути наділений.

3.3. Врахування регіональних особливостей під час оптимального розміщення рятувальних об'єктів і зонування територій

Результати наведених вище та інших обчислювальних експериментів щодо розв'язання тестових неперервних задач оптимального багатократного покриття множин з різними критеріями якості покриття свідчать про те, що за певних вхідних даних оптимальне розміщення центрів куль, які утворюють покриття, може виявитися невдалим, позаяк декілька центрів можуть розташовуватися один від одного занадто близько. А це на практиці не бажано. Тому далі сформулюємо задачі багатократного покриття обмеженої в E_2 області колами мінімального радіусу з умовами, які відповідають за неможливість «злипання» центрів куль, що утворюють покриття. А також представимо алгоритм наближеного розв'язання такої задачі.

3.3.1. Задача оптимального покриття обмеженої континуальної множини при додаткових обмеженнях на розташування центрів

Математична модель задачі кратного покриття обмеженої континуальної множини кулями найменшого радіусу за певних умов розміщення центрів куль, що утворюють покриття, записується у такий спосіб [183 – 185].

Нехай Ω – обмежена, замкнута множина з простору E_2 , $B(\tau_i, R) = \{x \in E_n: c(x, \tau_i) \leq R\}$ – c -куля радіусу R з центром в точці τ_i з Ω , де $c(x, \tau_i)$ – певна метрика (евклідова, Манхеттенська). Потрібно визначити величину радіусу оптимального покриття

$$\hat{R}(\tau_*^N) = \min_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N} \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i), \quad (3.43)$$

і вектор $\tau_*^N = (\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$, за яких досягається значення $\hat{R}(\tau_*^N)$ і виконуються умови:

$$\forall x \in \Omega: x \in \bigcap_{j=1}^l B(\tau_{ij}, \hat{R}) i_j \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad k \leq l \leq N; \quad (3.44)$$

$$\min_{(i,j): i>j} c(\tau_i, \tau_j) \geq \sigma, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.45)$$

де $\sigma > 0$ – задана величина.

Нагадаємо, k –кратне покриття множини Ω , яке задається вектором $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$, з радіусом $\hat{R}(\tau^N)$, що визначається за формулою (3.43) і задовольняє умови (3.44), є мінімальним k –кратним c -кульовим покриттям, генерованим вектором τ^N .

На відміну від представлених вище задач, дана постановка характеризується наявністю обмеження (3.45). Воно відповідає за розташування центрів у такий спосіб, що будь-яка їх пара знаходиться на відстані, не меншій за σ , один від одного.

3.3.2. Опис можливих підходів до розв'язання задач: використання апарату штрафних функцій, функцій Лагранжа

Врахування додаткових обмежень (3.45) в задачі багатократного покриття може здійснюватися за допомогою штрафної функції вигляду

$$P(\tau_1, \dots, \tau_N) = M \sum_{i=1}^N \max^2 \left(0, \sigma - \min_{(i,j): i>j} c(\tau_i, \tau_j) \right),$$

де $M \gg 0$ – коефіцієнт штрафу, а отже, від задачі (3.43) – (3.45) проводимо перехід до задачі:

$$\bar{R}_M(\tau^N) \rightarrow \min_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N}, \quad (3.46)$$

де

$$\begin{aligned} \bar{R}_M(\tau^N) = \hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N) + P(\tau_1, \dots, \tau_N) = \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, \dots, N} c(x, \tau_i) \lambda_i(x) + \\ + P(\tau_1, \dots, \tau_N). \end{aligned}$$

Чисельний алгоритм розв'язання задачі (3.46), наведений далі, базується на поєднанні методу проєкції узагальненого градієнту і r -алгоритму Шора. При цьому компоненти N -вимірного вектору узагальненого градієнта

$$g_{\bar{R}_M}(\tau^N) = (g^{\tau_1}(\tau^N), \dots, g^{\tau_j}(\tau^N), \dots, g^{\tau_N}(\tau^N)) \quad (3.47)$$

функції $\bar{R}_M(\tau^N)$ в точці $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ будемо обчислювати із застосуванням k -кратної діаграми Вороного. i -та компонента узагальненого градієнта (3.47) є елементом субградієнтної множини функції $\bar{R}_i(\tau^N)$, $i = \overline{1, N}$, яка в точці τ_i записується так:

$$G_{\bar{R}_i}^{\tau_i}(\tau^N) = \overline{co} \left\{ g_c^{\tau_i}(\bar{x}, \tau^N), \bar{x}: c(\bar{x}, \tau_i) = \max_{T_m: i \in T_m} \max_{x \in V(\bar{\tau}^{T_m})} c(x, \tau_i) \right\}, i = \overline{1, N}. \quad (3.48)$$

Тут $g_c^{\tau_i}(\bar{x}, \tau^N)$ – узагальнений градієнт функції $c(x, \tau_i)$ в точці $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$, $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)})$.

Представимо один з можливих чисельних алгоритмів розв'язання задачі (3.46) про оптимальне k -кратне покриття – пошук координат центрів $(\tau_1^*, \dots, \tau_N^*)$, мінімізуючи цільову функцію $\bar{R}_M(\tau^N)$ у припущенні, що множина, яка покривається, має просту структуру, причому є опуклою і замкненою, приміром, одиничний квадрат $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. В основі цього алгоритму лежить метод проєкції узагальненого градієнтного спуску з розтягненням простору у напрямку різниці двох послідовних субградієнтів. Складовою частиною алгоритму є побудова діаграми Вороного k -го порядку та використання її для обчислення вектору субградієнта цільової функції задачі (3.46) за формулами (3.48). Нагадаємо, в алгоритмі замість вектору τ^N пишеться τ .

Алгоритм 3.4-К

Ініціалізація. Множину Ω покрити прямокутною сіткою з кроком $\Delta_j, j = 1, 2$. Множину вузлів прямокутної сітки на множині Ω позначити $\tilde{\Omega}$. Задати величину штрафу $M \gg 0$. Задати початкове положення центрів покриття $\tau^{(0)} = (\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)})$.

Обчислити величину $\hat{R}(\tau^{(0)}) = \max_{x \in \tilde{\Omega}} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=\overline{1,N}} c(x, \tau_i^{(0)}) \lambda_i(x)$, за

допомогою алгоритму **3.1П-К** розв'язання задачі пошуку радіусу N кіл, що складають k -кратне c -кульове покриття заданої множини Ω . При цьому для кожного $i = 1, \dots, N$ обчислити величину

$$R_i(\tau^{(0)}) = \max_{T_m: i \in T_m} \max_{x \in V(\tilde{\tau}^{T_m})} c(x, \tau_i^{(0)}).$$

Обчислити значення розширеної функції $\bar{R}_M(\tau^{(0)}) = \hat{R}(\tau^{(0)}) + P(\tau_1^{(0)}, \dots, \tau_N^{(0)})$.

За формулою (3.48) побудувати субградієнтну множину $G_{R_i}^{\tau_i}(\tau^{(0)}) = \overline{co} \{g_c^{\tau_i}(\bar{x}, \tau^{(0)}), \bar{x}: c(\bar{x}, \tau_i) = R_i(\tau_i^{(0)})\}$, $i = 1, \dots, N$, де $g_c^{\tau_i}(\bar{x}, \tau^{(0)})$ – узагальнений градієнт функції $c(x, \tau_i)$ в точці $\tau^{(0)}$. Вибрати вектор $g_{\bar{R}}(\tau^{(0)}) \in G_{R_i}^{\tau_i}(\tau^{(0)})$, задати початкову величину кроку $h_0 > 0$.

На першому кроці визначити:

$$\tau^{(1)} = P_{\Omega}(\tau^{(0)} - h_0 g_{\bar{R}}(\tau^{(0)})),$$

де P_{Ω} – оператор проєкції на Ω .

Перейти на крок 2.

Нехай після m , $m = 1, 2, \dots$, кроків отриманий набір центрів $\tau^{(m)} = (\tau_1^{(m)}, \dots, \tau_N^{(m)})$. Опишемо **(m+1)-й** крок алгоритму.

1. За знайденими координатами центрів $\tau_1^{(m)}, \dots, \tau_N^{(m)}$, використовуючи алгоритм **3.1П-К**, обчислити величину

$$R(\tau^{(m)}) = \max_{x \in \tilde{\Omega}} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=\overline{1,N}} c(x, \tau_i^{(m)}) \lambda_i(x).$$

Для кожного $i = 1, \dots, N$ обчислити величину

$$R_i(\tau^{(m)}) = \max_{T_m: i \in T_m} \max_{x \in V(\tilde{\tau}^{T_m})} c(x, \tau_i^{(m)}).$$

2. За формулою (3.48) побудувати субградієнтну множину $G_{R_i^V}^{\tau_i}(\tau^{(m)})$.
3. Обрати вектор $g_{\hat{R}}(\tau^{(m)}) \in G_{R_i^V}^{\tau_i}(\tau^{(m)})$. Здійснити $(m+1)$ -й крок r -алгоритму за формулами, аналогічними (3.12), (3.13).
4. Крок h_m знайти з умови мінімуму цільової функції за обраним напрямом.
5. Якщо умова закінчення ітераційного процесу (близькість значень цільової функції або наближень центрів на двох послідовних ітераціях) не виконується, то перейти до $(m+2)$ -го кроку алгоритму, у протилежному випадку – перехід до п. 6.
6. Вважати $\tau_* = \tau^{(l)}$, де l – номер ітерації алгоритму з виконаною умовою завершення його роботи. Застосовуючи алгоритм **1-К**, обчислити значення мінімального радіусу покриття

$$\hat{R}(\tau_*) = \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, \bar{N}} c(x, \tau_{*i}) \lambda_i(x).$$

Кінець алгоритму **3.4-К**.

Розглянемо питання щодо вибору штрафного коефіцієнта M . З одного боку, штраф має бути досить великим, аби набути значення $\hat{R}(\tau_*^N)$ було якомога ближчим до оптимального, а вектор τ_*^N – якомога ближчим до умовного оптимуму. З іншого боку, занадто велике значення штрафного коефіцієнта може спричинити обчислювальні труднощі при відшукуванні оптимального розв'язку в задачі без обмежень. Тому доцільно користуватися методом штрафу в ітераційній формі, стартуючи із значення m_1 , не занадто великого, і розв'язуючи задачу:

$$R(\tau^N; m_1) = \hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N) + m_1 \sum_{i=1}^N \max^2 \left(0, \sigma - \min_{(i,j): i > j} c(\tau_i, \tau_j) \right) \rightarrow \min_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N}.$$

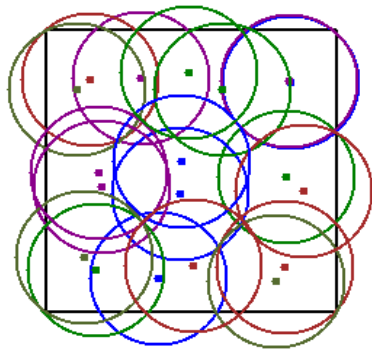
Якщо при цьому отриманий розв'язок $\tau_*^N(m_1)$ буде хорошим наближенням оптимуму, то обчислення закінчуються. Інакше штраф, котрий

відповідає за порушення умов (3.45), недостатньо високий, і збільшуючи його в кілька разів (наприклад, вважаючи $m_2 = 7m_1$), слід розв'язувати нову задачу без обмежень (3.45) і т.д.

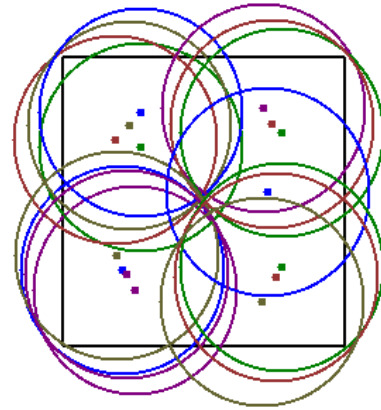
Наведемо тут результати розв'язання модельних задач багатократного покриття квадрата 1×1 з метрикою

$$c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x^j - \tau_i^j)^2}.$$

На рис. 3.19 представлено результати покриття квадрату двократно 19-ю колами та трикратно 15-ю колами, отримані під час розв'язання задачі (3.43) без урахування обмежень (3.45). Як видно, деякі центри знаходяться дуже близько один до одного і навіть можуть бути поєднані.

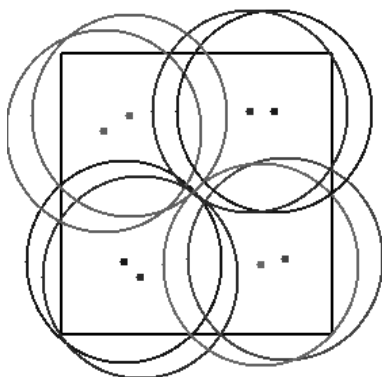


N=19, k=2

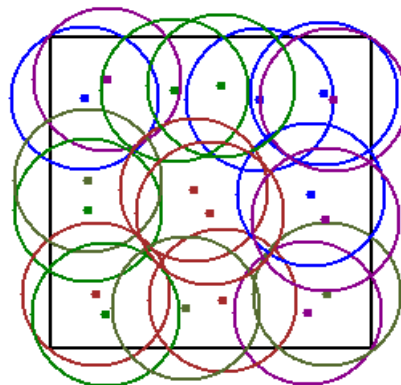


N=15, k=3

Рис. 3.19. k -кратне оптимальне покриття одиничного квадрата N кулями



а) N=8



б) N=19

Рис. 3.20. 2-кратне оптимальне покриття квадрата з контролем мінімальної відстані між центрами

На рис. 3.20 показані багатократні оптимальні покриття за інших N і k , але вже з урахуванням обмежень (3.45). Очевидно, центри кіл, що генерують кратне покриття, знаходяться на допустимій відстані один від одного.

При побудові математичних моделей практичних задач оптимального покриття обмеження на розташування центрів куль можуть мати й інший вигляд. Наприклад, можна вимагати, аби центри були розміщені в області якомога рівномірно, або жоден з них не потрапив в деяку заборонену зону.

Введення у функціонал задачі доданку, котрий відповідає за неможливість «злипання» центрів куль, що утворюють покриття, будемо називати процедурою **регуляризації функціоналу** для задачі багатократного покриття N кулями мінімального радіусу. Такі поправки саме й покликані контролювати мінімальну відстань між центрами, що розміщуються так, аби ця відстань була не меншою за задану величину (див. рис. 3.20), або центри в області розташовувалися б якомога рівномірно (див. рис. 3.21).

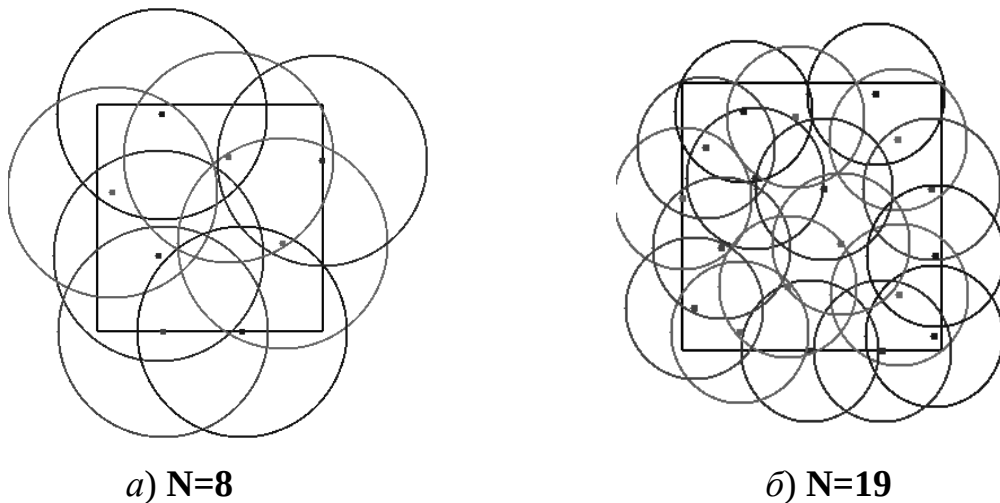


Рис. 3.21. 2 -кратне оптимальне покриття квадрата з регуляризацією функціоналу з метою рівномірного розміщення центрів в області

3.3.3. Оптимальне кульове покриття областей складної форми. Застосування апарату R-функцій для опису границі регіону

В даному параграфі акцент зроблено на алгоритмічний спосіб задання форми області, що покривається, врахування структури її границь при розміщенні центрів куль, що утворюють багатократне покриття регіону [186, 187].

Розглянемо способи аналітичного опису форми області. При розв'язанні задач покриття обмежених областей зі складними межами іноді досить простого кодування елементів креслень (зображень, малюнків) або їх сканування. Такий підхід можливий, якщо, наприклад, не вимагати розміщення центрів куль, що покривають область, в самій області. Алгоритм **3.3П-к**, якраз і передбачає такий спосіб її задання.

Якщо ж шукати координати центрів всередині області, що покривається, а остання не є простою, то необхідно задати її границю в тій формі, яка прийнята в аналітичній геометрії – за допомогою рівнянь і нерівностей і враховувати ці математичні конструкції при визначенні координат центрів куль.

Як відомо, одним із методів, що застосовуються до розв'язання оберненої задачі геометрії – побудови рівнянь заданих геометричних об'єктів – є метод R-функцій Р.Л. Рвачова [188]. За допомогою R-функцій виявляється можливим побудова у неявній формі рівнянь границь складних областей за відомими рівняннями простих.

Відтак, для задання геометрії області скористаємося апаратом R-функцій. Наведемо деякі поняття та теореми з теорії R-функцій, слідуючи [188].

Визначення. Точка $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ простору $X \subset E_n$ називається виродженою, якщо хоча б одна з її координат дорівнює нулю. Інакше точка називається невиродженою.

Множина всіх вироджених точок простору є поєднанням гіперплощин. $x_i, i = 1, 2, \dots, n$, яке можна розглядати як єдину гіперповерхню H .

Гіперповерхня H розбиває n -вимірний простір на 2^n областей H_j , $j = 1, 2, \dots, 2^n$.

Визначення. Функція $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, визначена всюди у просторі X , називається **R-функцією**, якщо в кожній з областей H_j , $j = 1, 2, \dots, 2^n$, вона зберігає знак, тобто $S[f(x_1, x_2, \dots, x_n)] = F_i = \text{const}$, де $S(z)$ – двозначний предикат, за допомогою якого визначається приналежність величини z до одного з класів додатних або від’ємних чисел:

$$S(z) = \frac{1 + \text{sign}(z)}{2}, \quad z \neq 0,$$

F_i – двійкова величина, одна й та сама для всіх точок області H_j , $j = 1, 2, \dots, 2^n$.

Аби функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ була R-функцією, необхідно і достатньо, щоб вона задовольняла наступну умову:

$$S[f(x_1, x_2, \dots, x_n)] = F(S(x_1), S(x_2), \dots, S(x_n)),$$

де $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ – певна булева функція.

Прикладами **R-функцій** та відповідних їм булевих функцій у двовимірному просторі є наступні пари:

$$1) y = x_1 x_2, \quad F(X_1, X_2) = X_1 \rightarrow X_2;$$

$$2) x_1 \wedge_{\alpha} x_2 \equiv \frac{(x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 - 2\alpha x_1 x_2 + x_2^2})}{2}, \quad F(X_1, X_2) = X_1 \wedge X_2; -1 < \alpha \leq 1.$$

Метод опису геометричних двовимірних областей складної форми за допомогою **R-функцій** базується на наступній теоремі.

Теорема [188]. Якщо області $D_1, D_2, \dots, D_m$ описуються відповідно нерівностями $f_1(x_1, x_2) \geq 0$; $f_2(x_1, x_2) \geq 0$; $\dots$; $f_m(x_1, x_2) \geq 0$, а логіка побудови області D визначається за допомогою булевої функції $D = F[D_1, D_2, \dots, D_m]$, то нерівність

$$\psi(x_1, x_2) \equiv \varphi[f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2), \dots, f_m(x_1, x_2)] \geq 0,$$

визначає область D , а $\varphi[z_1; z_2; \dots; z_m] \in \mathbf{R}$ -функцією, відповідною функції F .

Оскільки для компактної множини $\Omega \subset E_2$ і неперервної функції $c(x, \tau)$ оптимальне k -кратне покриття множини Ω заданим числом N c -куль

однакового радіусу існує, то задачу про оптимальне покриття можна переписати наступним чином:

$$\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N) \rightarrow \min_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N}, \quad (3.49)$$

$$\text{де } \hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N) = \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, \overline{N}} c(x, \tau_i) \lambda_i(x).$$

Для не пустої компактної множини Ω і $(\tau_1, \dots, \tau_N)$ з Ω^N справедлива рівність:

$$\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N) = \max_{x \in \Omega} \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=1, \overline{N}} c(x, \tau_i) \lambda_i(x) = \max_{m=1, \dots, M} \max_{x \in \Omega_m} \max_{i \in T_m} c(x, \tau_i),$$

де множина Ω_m , $m = \overline{1, M}$, $M \leq C_N^k$, складає діаграму Вороного ***k*-го порядку** для множини Ω .

Позначимо через V фіксоване розбиття не пустої компактної множини Ω на $\bar{M} \leq C_N^k$ підмножин $V_1, \dots, V_m, \dots, V_{\bar{M}}$, що складають ***k*-кратну** діаграму Вороного для Ω , причому всі V_i є не пустими й компактними. Для кожного $i = 1, \dots, N$ розглянемо функції

$$R_i(\tau^N) = \max_{T_m: i \in T_m} \max_{x \in V(\hat{\tau}^{T_m})} c(x, \tau_i). \quad (3.50)$$

Субградієнтна множина $G_{R_i^V}(\hat{\tau}^N)$ функції (3.50) в точці $\hat{\tau}^N$ обчислюється за формулою:

$$G_{R_i^V}(\hat{\tau}^N) = \overline{co} \cup_{x \in I(\hat{\tau}^N)} G_{c(x, \tau_i)}(\hat{\tau}^N), \quad (3.51)$$

де $I(\hat{\tau}^N) = \{x: x \in \cup_{m: i \in T_m} V_m; c(x, \hat{\tau}_i) = R_i(\hat{\tau}^N)\}$; $G_{c(x, \tau_i)}(\hat{\tau}^N)$ – субдиференціал функції $c(x, \tau_i)$ за змінною τ_i на E_2 при фіксованому $x \in V_i$.

Узагальнений градієнт цільової функції задачі (3.50) має наступний вигляд:

$$g_{\hat{R}}(\tau^N) = (g_{R_1}^{\tau_1}(\tau^N), \dots, g_{R_i}^{\tau_i}(\tau^N), \dots, g_{R_N}^{\tau_N}(\tau^N)),$$

i -та компонента якого є елементом субградієнтної множини функції $R_i(\tau^N)$, $i = \overline{1, N}$, з (3.43) в точці τ_i , котре записується у такий спосіб:

$$G_{R_i^V}^{\tau_i}(\tau^N) = \overline{co} \left\{ g_c^{\tau_i}(\bar{x}, \tau^N), \bar{x}: c(\bar{x}, \tau_i) = \max_{T_m: i \in T_m} \max_{x \in V(\bar{\tau}^{T_m})} c(x, \tau_i) \right\}, i = \overline{1, N}, \quad (3.52)$$

де $g_c^{\tau_i}(\bar{x}, \tau^N)$ – узагальнений градієнт функції $c(x, \tau_i)$ в точці $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N)$, $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)})$.

У випадку нефіксованого розбиття множини Ω і невідомого положення точок $\tau_1, \dots, \tau_N$, що генерують оптимальне покриття Ω , функція $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$ задачі (3.49) не є опуклою на Ω^N , оскільки неопуклою за $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \hat{r}(x, \tau^N) = \min_{\lambda(x) \in \Lambda_N^k} \max_{i=\overline{1, N}} c(x, \tau_i) \lambda_i(x)$. Але остання функція складається з опуклих ділянок, що відповідають локальним мінімумам функції $\hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N)$, тому її узагальнений градієнт збігається з субградієнтом однієї з опуклих ділянок.

Далі опишемо підхід щодо розв'язання задачі про оптимальне кульове покриття, в якому усі центри куль, що покривають область, належать їй самій. Алгоритм розв'язання задачі у разі, коли центри можуть виходити за межі заданої області, представлений у [135].

Додаткові умови на розміщення центрів будемо враховувати за допомогою штрафної функції виду

$$P_1(\tau_1, \dots, \tau_N) = M \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \max^2(0, \sigma - c(\tau_i, \tau_j)),$$

де $M \gg 0$ – коефіцієнт штрафу. Для врахування приналежності розміщуваних центрів заданій множині Ω введемо функцію штрафу, який накладається за вихід за межі Ω . Нехай логіка побудови множини задана двійковою функцією $\Omega = F[D_1, D_2, \dots, D_m]$, де області $D_1, \dots, D_m$ визначаються нерівностями

$$f_1(x) \geq 0; \dots; f_m(x) \geq 0,$$

а нерівність

$$\psi(x) \equiv \varphi[f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)] \geq 0,$$

де $\varphi[z_1; z_2; \dots; z_m]$ – $\mathbf{R}$ -функція, яка поставлена у відповідність функції $D = F[D_1, D_2, \dots, D_m]$, визначає область Ω . Нехай функція $P_2: E_n \rightarrow R$ така, що

$$P_2(\tau) = \begin{cases} 0, & \psi(\tau) \geq 0, \\ > 0, & \psi(\tau) < 0. \end{cases}$$

Тоді від вихідної задачі покриття здійснюється перехід до задачі без обмежень (задачі зі штрафами):

$$\bar{R}_M(\tau^N) \rightarrow \min_{(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \Omega^N}, \quad (3.53)$$

де $\bar{R}_M(\tau^N) = \hat{R}(\tau_1, \dots, \tau_N) + P_1(\tau_1, \dots, \tau_N) + M \sum_{i=1}^N P_2(\tau_i)$.

В основі чисельного алгоритму розв'язання задачі (3.53) лежить г-алгоритм Шора. При цьому компоненту N -вимірного вектору узагальненого градієнта

$$g_{\bar{R}_M}(\tau^N) = (g^{\tau_1}(\tau^N), \dots, g^{\tau_j}(\tau^N), \dots, g^{\tau_N}(\tau^N)) \quad (3.54)$$

функції $\bar{R}_M(\tau^N)$ в точці $\tau^N = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ будемо обчислювати за формулою:

$$g^{\tau_j}(\tau^N) = g_{R_j^V}^{\tau_j}(\tau^N) + \frac{\partial P_1(\tau_1, \dots, \tau_N)}{\partial \tau_j} + M \frac{\partial P_2(\tau_j)}{\partial \tau_j}, \quad (3.55)$$

де $g_{R_j^V}^{\tau_j}(\tau^N) \in G_{R_j^V}^{\tau_j}(\tau^N)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1(\tau_1, \dots, \tau_N)}{\partial \tau_j} &= M \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \max(0, \sigma - c(\tau_i, \tau_j)) \frac{\partial c(\tau_j, \tau_i)}{\partial \tau_j}; \\ \frac{\partial P_2(\tau_j)}{\partial \tau_j} &= \max(0, -\text{sign}(\psi(\tau_j))) \frac{\partial \psi(\tau_j)}{\partial \tau_j}. \end{aligned}$$

3.3.4. Результати обчислювальних експериментів

Приведемо результати розв'язання задачі про оптимальне кульове покриття області $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ за виключенням внутрішності круга $(x_1 - 0,5)^2 + (x_2 - 0,5)^2 \leq 0,09$. Вказану область Ω представимо за допомогою наступних областей:

$$\mathbf{D}_1: 0,09 - (x_1 - 0,5)^2 - (x_2 - 0,5)^2 \leq 0;$$

$$\mathbf{D}_2: x_1 - 1 \leq 0;$$

$$\mathbf{D}_3: -x_1 \leq 0;$$

$$\mathbf{D}_4: x_2 - 1 \leq 0;$$

$$\mathbf{D}_5: -x_2 \leq 0.$$

Побудова області Ω визначається наступною логікою:

$$\Omega = (\mathbf{D}_1 \wedge \mathbf{D}_2 \wedge \mathbf{D}_3 \wedge \mathbf{D}_4 \wedge \mathbf{D}_5) = \bigwedge_{i=1}^{i=5} \mathbf{D}_i.$$

Область Ω визначається нерівністю

$$\psi(x_1, x_2) = \bigwedge_{i=1}^{i=5} f_i(x_1, x_2) \leq 0,$$

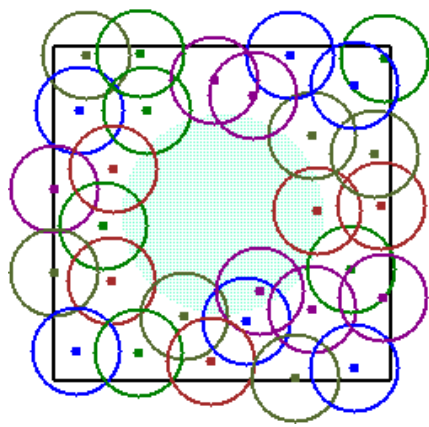
де $f_i(x_1, x_2)$, $i = 1, \dots, 5$, – функції, які задають відповідні області.

На рис. 3.22 *а, б* представлені результати одно- та двократного покриття області 29-ю та 51-ою с-кулями відповідно, метрика – евклідова. Обмеження (3.45) не враховувалися.

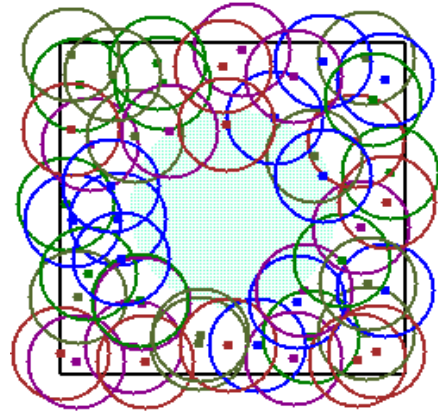
В обох випадках майже всі центри розміщені всередині. Ті одиничні центри, які вийшли за кордон області, фактично для покриття відповідної кратності є зайвими, оскільки забезпечують покриття тієї частини області, яка вже вкрита кулями із сусідніми центрами.

На рис. 3.22, *в* подано результат розв'язання задачі про оптимальне двократне кульове покриття множини Ω 29-ма с-кулями (евклідова метрика) з обмеженнями, мінімальна відстань між найближчими центрами є не меншою за 0,07. Як і в попередніх випадках, два центри, які опинилися поза допустимою ділянкою, для оптимального двократного покриття не відіграють жодної ролі, оскільки зайвий раз покривають вже двічі покриту область.

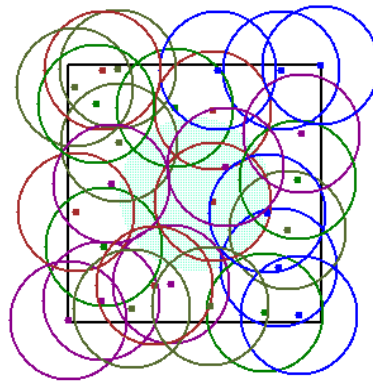
А отже, робимо висновок, аби покрити область із отриманою величиною радіусу покриття достатньо 27-ми центрів.



a) $N=29, k=1; R=0,1308$



б) $N=51, k=2; R=0,1423$



в) $N=29, k=2; R=0,23005$

Рис. 3.22. k -кратне покриття неопуклої області, метрика евклідова

3.4. Висновки за розділом III

Удосконалено моделі та методи оптимального багатократного кульового покриття, котрі, на відміну від раніше розроблених, враховують властивості множини, на якій розміщуються центри куль, що дозволяє підвищити оперативність і обґрунтованість прийняття рішень про вибір місць розташування підрозділів систем екстреної логістики на базі існуючих об'єктів, а також забезпечує уникнення розташування центрів занадто близько один від одного

Розглянуто задачі оптимального розміщення аварійно-рятувальних служб з критерієм найкоротшого терміну надання допомоги нужденному в заданому регіоні. Запропоновано математичні моделі у вигляді неперервних

задач багатократного ϵ -кульового покриття обмеженої множини за певних умов на область розташування центрів, що утворюють покриття. Описано методи та алгоритми розв'язання задачі багатократного кульового покриття, засновані на використанні елементів теорії неперервних задач ОРМ, субградієнтних методів негладкої оптимізації і апарату штрафних функцій.

Встановлено зв'язок багатократного покриття множини Ω ϵ -кулями мінімального радіусу з оптимальним мультиплексним розбиттям цієї множини, що дозволяє зводити розв'язання задачі про покриття до задачі розбиття, звичайно, в тих випадках, коли це є доцільним. Досліджено властивості розглянутих задач. Проілюстровано визначення радіусу покриття у ході розв'язання задач ОРМ на модельних прикладах. Виявлено критерій якості мультиплексного розбиття, котрий дозволяє під час розв'язання задач ОРМ з нефіксованими центрами отримувати таке їх розташування, яке збігається (з точністю до нумерації) із набором центрів куль мінімального радіусу, що кратно покривають задану множину.

Представлено математичну модель та метод розв'язання неперервної задачі багатократного покриття області, що має складну форму, кулями мінімального радіусу за наявності обмежень на відстань між центрами, що розміщуються. Розроблено та програмно реалізовано алгоритм розв'язання зазначеної задачі, який для опису області використовує R -функції.

Розроблені методи: 1) дозволяють одночасно визначати місця розміщення усіх центрів допомоги та їх зони відповідальності, оптимальні в сенсі мінімальної відстані до найвіддаленішого клієнта, з урахуванням можливості перекриття зон; 2) не залежать від розмірності простору, якому належить область, що покривається, а, отже, можуть використовуватися для широкого кола практичних задач, що зводяться до відповідних математичних моделей; 3) є індиферентними до геометричних особливостей множин, котрі покриваються; 4) застосовні у випадку, коли центри розміщуються на скінченній множині заданих точок.

Обчислювальні експерименти з розв’язання модельних задач оптимізації кульового покриття свідчать про локальний характер їх оптимальних розв’язків, які можна отримати, реалізуючи запропоновані методи. Хоча у деяких випадках, використовуючи певні метрики, алгоритми призводили до глобальних оптимальних розв’язків.

Основні результати третього розділу викладено в роботах [95, 96, 175 – 180, 183 – 187].

РОЗДІЛ IV

ДВОЕТАПНІ ЗАДАЧІ РОЗМІЩЕННЯ-РОЗПОДІЛЕННЯ СТРУКТУРНИХ ПІДРОЗДІЛІВ СИСТЕМИ ЕКСТРЕНОЇ ЛОГІСТИКИ

4.1. Обґрунтування доцільності розробки математичних моделей і методів розв'язування багатоетапних задач розміщення органів евакуації і зонування постраждалих територій

У розділі розроблені двоетапні моделі, методи та алгоритми розміщення органів евакуації населення і одночасного територіального зонування району, що може зазнати шкоди від НС, з метою запобігання і уникнення тяжких жертв серед його мешканців.

Відповідно до Постанови КМ [189], пункт 21 зі змінами, внесеними згідно з [190], до таких органів належать, зокрема, збірні, проміжні та приймальні пункти евакуації. Збірні (первинні) пункти важливі для організації вивезення мешканців, матеріальних та культурних цінностей з територій, уражених внаслідок надзвичайних ситуацій (аварії на хімічно або радіаційно небезпечних об'єктах). Проміжні пункти евакуації, зазвичай, організовують на кордоні зони НС задля пересадки населення із забрудненого транспорту на дезактивований і подальшого його транспортування до безпечних зон. У приймальних пунктах населення та евакуйовані цінності реєструють і розподіляють за місцями постійного або тимчасового розміщення. Усі зазначені центри забезпечуються зв'язком з різними службами та комісіями з питань евакуації для ефективної організації процесу. У деяких випадках для максимального забезпечення безпеки населення його евакуація може проводитися в два етапи.

Приміром, у разі радіаційної або хімічної загрози населення потрібно евакуювати на першому етапі з місць його помешкання до границі ураженої зони, а на другому – від цієї границі до пунктів кінцевого призначення на небезпечній території незабрудненим транспортним засобом. Саме

двоетапному процесу евакуації присвячені задачі, моделі та методи цього розділу.

Згідно [189], визначення кількості та можливих місць розташування проміжних пунктів евакуації є прерогативою місцевих держадміністрацій та органів місцевого самоврядування. А отже, розроблений математичний апарат і його практичне впровадження буде корисним для прийняття обґрунтованого управлінського рішення щодо організації системи евакуації в разі загрози надзвичайної ситуації. Тим паче, проведення заздалегідь певних розрахунків і операцій для забезпечення безпеки населення є вкрай необхідним, адже за нормативними документами, з моменту прийняття рішення про евакуацію протягом чотирьох годин мають бути організовані відповідні органи усіх рівнів.

4.2. Побудова математичних моделей двоетапних задач оптимального зонування території потенційної небезпеки з розміщенням органів з евакуації

4.2.1. Загальна постановка і математична модель двоетапних задач оптимального зонування території потенційної небезпеки з розміщенням проміжних (приймальних) пунктів первинної допомоги

Змістовна постановка задачі формулюється у такий спосіб. Нехай на певній території склалася (або потенційно може статися) надзвичайна ситуація, що може спричинити шкоду здоров'ю людей. Потрібно визначити, в яких безпечних місцях можна розмістити і облаштувати проміжні (приймальні) пункти з евакуації мешканців постраждалого від НС району для подальшого їх транспортування у відведені для прийняття населення центри (лікарні, притулки, тощо) за мінімально можливий час. При цьому бажано розбити постраждалу територію на зони і закріпити їх за відповідними пунктами збору задля найшвидшого переміщення евакуйованого населення з

небезпечних місць. А, отже, евакуацію населення передбачається здійснювати поетапно: спочатку – із зони небезпеки до відповідного первинного пункту збору (далі будемо їх називати центрами першого етапу), потім – до спеціально відведених центрів екстреної допомоги (називатимемо їх центрами другого етапу). Схема такого евакуаційного процесу наведена на рис. 4.1. Звісно, розподіляти постраждале населення за центрами потрібно, враховуючи їхні місткості.

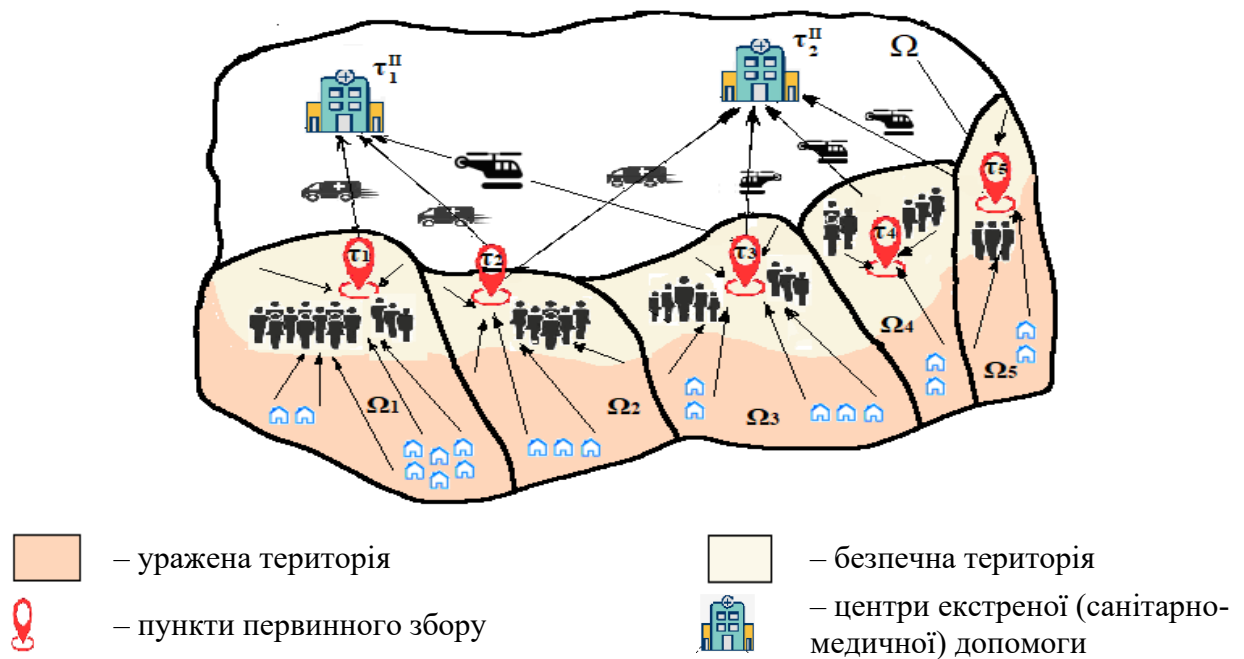


Рис. 4.1. Схема двоетапної евакуації мешканців району Ω , постраждалого від НС

Введемо наступні позначення: Ω – територія, яка зазнала пошкоджень (може бути уражена) внаслідок надзвичайної події, м^2 ; $\hat{\Omega} \subseteq \Omega$ – безпечна територія, на якій можна розміщувати первинні пункти збору населення, м^2 ; $\rho(x)$ – функція, що описує розподілення мешканців в точці x множини Ω , $\text{люд}/\text{м}^2$; N та M – кількість первинних та кінцевих пунктів; S – загальна кількість населення на ураженій території, люд. ; τ_i^r – i -ий центр r -го етапу; b_i^r – його місткість, $r = I, II$, люд. ; $c_i^I(x, \tau_i^I)$ – зважена вартість евакуації мешканця від точки $x \in \Omega$ до центру τ_i^I , $\text{грн}/\text{люд.}$; $c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II})$ – вартість транспортування евакуйованого від τ_i^I до τ_j^{II} , $\text{грн}/\text{люд.}$; a_i^I – витрати на

організацію пункту збору в точці τ_i^I , розрахована на одну евакуйовану людину, грн/люд; a_j^{II} – фіксовані організаційні витрати центру τ_j^{II} , розраховані на одну людину, грн/люд; v_{ij} – кількість населення, яке евакуюється з τ_i^I до τ_j^{II} , люд, $i = \overline{1, N}$; $j = \overline{1, M}$.

Потрібно знайти таке розбиття множини Ω на N підмножин $\bar{\omega} = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\}$, координати розміщення на $\hat{\Omega}$ набір $\tau^I = \{\tau_1^I, \dots, \tau_N^I\}$ центрів цих підмножин і такі обсяги перевезень $v = \{v_{11}, \dots, v_{NM}\}$, за яких функціонал

$$F(\bar{\omega}, \tau^I, v) = \beta_1 \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c_i^I(x, \tau_i) + a_i^I) \rho(x) dx + \beta_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) v_{ij} \quad (4.1)$$

досягав би мінімального значення, і виконувались наступні обмеження:

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = \sum_{j=1}^M v_{ij}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (4.2)$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^{II}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (4.3)$$

$$\bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^N, \quad v \in R_{NM}^+, \quad \tau^I \in \hat{\Omega}^N \quad (4.4)$$

$$\Sigma_{\Omega}^N = \{\bar{\omega} = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\}: \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = \overline{1, N}\}, \quad (4.5)$$

де $\beta_1, \beta_2 \geq 0, \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$ – задані величини, котрі задають пріоритет доданків і враховують їх нормування і безрозмірність; Σ_{Ω}^N – клас всіх можливих розбиттів Ω на N зон; $\bar{\omega} = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\}$ – елемент класу Σ_{Ω}^N ; R_{NM}^+ – простір $(N \times M)$ невід’ємних дійсних матриць.

У випадку, коли в системах екстреної евакуації центрами першого етапу є рятувальні служби, критерієм їх оптимального розміщення може бути мінімальна відстань від найвіддаленішої точки підмножини Ω , яка закріплена за центром τ_i^I , до самого центру задля можливості надання певної послуги в найкоротший термін. Тоді першу складову критерію (5.1) задачі можна замінити наступним доданком (з відповідним коефіцієнтом β):

$$R(\tau^I) = \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} d(x, \tau_i^I), \quad (4.6)$$

де $d(x, \tau_i^I)$ – відстань між двома точками, а величина $R(\tau^I)$ визначає радіус d -кульового покриття множини Ω , що задається центрами $\tau_1^I, \tau_2^I, \dots, \tau_N^I$.

Якщо множина $\hat{\Omega}$, на якій розміщуються центри першого етапу, є континуальною, то задача (4.1) – (4.5) є двоетапною неперервною задачею оптимального розбиття множин з додатковими зв'язками і для її розв'язання можна застосовувати методи і алгоритми, запропоновані в [191, 192, 193].

У випадку, коли $\hat{\Omega}$ – скінченна множина точок з Ω (наприклад, якщо під пункти первинного збору населення можна виділяти вокзали, річкові порти, школи, дитячі садки, інші соціальні споруди), задача набуває мішаний – дискретно-неперервний – характер, а отже, під час пошуку оптимальних місць розміщення центрів першого етапу мають бути реалізовані деякі перебірні алгоритми.

4.2.2. Універсальність запропонованої математичної моделі двоетапного розподілу матеріальних потоків на випадок надзвичайної події

Одним із завдань Єдиної державної системи попередження та ліквідації надзвичайних ситуацій є першочергове життєзабезпечення населення, яке постраждало при надзвичайних ситуаціях природного або техногенного характеру. Під життєзабезпеченням населення (ЖЗН) у НС розуміють сукупність заходів щодо створення та підтримки умов збереження життя та медичного забезпечення людей в зонах НС, на шляхах їх евакуації та у тимчасових або постійних місцях розміщення за нормами та нормативами. До видів ЖЗН НС належать надання медичної допомоги, забезпечення предметами першої необхідності, комунально-побутовими послугами, продуктами харчування, тощо.

Як правило, для забезпечення гарантованого захисту населення або об'єктів господарювання від природних або техногенних НС заздалегідь створюється державний резерв матеріально-технічних, продовольчих, медичних та інших ресурсів. Розробка плану заходів щодо першочергового ЖЗН в умовах НС має проводитись у режимі повсякденної діяльності відповідних органів управління регіональних та територіальних підсистем на основі прогнозів про можливу обстановку на території потенційних стихійних лих, аварій та катастроф.

Несподіваність виникнення НС природного характеру, особливо землетрусів, і техногенних, відсутність методів і способів короткострокового прогнозування часу їх виникнення, масштабність території, що охоплюється ними, ймовірність масової поразки населення вимагають високої підготовленості територіальних підсистем пом'якшення наслідків НС та організації першочергового ЖЗН.

Слід зазначити, що запропонована модель двоетапного розміщення-розподілення може бути використана і для математичного опису задачі оптимального розташування складів матеріально-технічних, продовольчих, медичних ресурсів; складів аварійного постачання й розподілу предметів першої необхідності; розгортання пунктів видачі засобів індивідуального захисту (рис. 4.2).

У цьому випадку потік ресурсу здійснюватиметься в іншому напрямку, від центрів другого етапу (державного резерву, складів) до центрів першого етапу (пунктів розподілення і видачі ресурсів, предметів першої необхідності), а від останніх – до мешканців постраждалих від НС територій, навіть найвіддаленіших і в найкоротші терміни. Умови (4.2) та (4.3) описують обмежені можливості центрів обох етапів і передбачають задоволення (в певному сенсі) потреб всього населення постраждалої території.

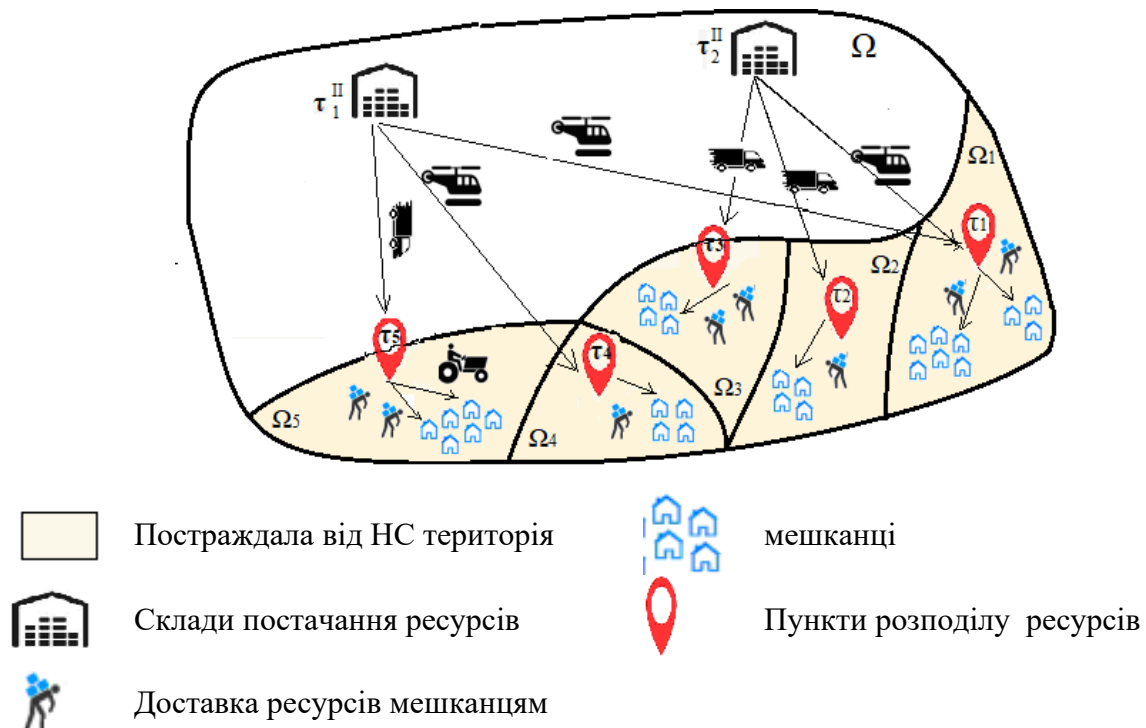


Рис. 4.12 Схема двоетапного розподілу матеріально-технічних ресурсів в зонах надзвичайної ситуації

Враховуючи універсальний характер моделі (4.1) – (4.5) надалі умовимося, під час викладання теоретичного матеріалу в окремих випадків сформульованих вище і подібних задач називати множиною територію, на якій розподілений попит на послугу; центрами першого етапу – проміжні або приймальні пункти; підмножинами – зони збору (обслуговування) населення, які відповідають центрам τ_i^I ; потужністю – місткість центрів будь-якого етапу; обсягами перевезень – величини потоку мешканців (або продуктів) $v_{11}, \dots, v_{NM}$. За синоніми вважатимемо «область» «територія», «регіон».

Конкретизуючи початкові умови, можна отримати різні окремі варіанти задачі (4.1) – (4.5). Так, наявність чи відсутність додаткових обмежень на місткість центрів або місця їх розташування визначають наступні постановки [194]: задачі оптимального розбиття множин з додатковими зв'язками (ОРМДЗ) при фіксованих центрах без обмежень на потужність пунктів

першого етапу; при наявності обмежень на місткість пунктів першого етапу; із розміщенням центрів при наявності обмежень на місткість пунктів першого етапу.

4.3 Опис методу розв'язання двоетапних задач розміщення-розподілення з фіксованими центрами першого етапу

4.3.1. Задача з відомими потужностями центрів першого етапу та її розв'язність

Спочатку відокремимо випадок задачі (4.1) – (4.5), яким є **задача з фіксованими центрами першого етапу**, коли центри першого етапу є фіксованими, а їхня потужність відома заздалегідь. Тоді умову (4.2) слід замінити такими обмеженнями:

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = b_i^I, \quad i = \overline{1, N}; \quad (4.7)$$

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = b_i^I, \quad i = \overline{1, N}. \quad (4.8)$$

В термінах задачі про евакуацію населення обмеження (4.7) означає, що загальна кількість мешканців в зоні, які відповідають i -му центру I етапу, дорівнюють його потужності; згідно умови (4.8), кількість мешканців, вивезених з i -го центру I етапу дорівнює місткості цього пункту; за умови (4.3) j -їй центр II етапу у повному обсязі може прийняти населення, евакуйоване і доставлене до цього центру; а обмеження (4.4) означають, що кожен проміжний пункт з евакуації відповідає за свою зону, які не перетинаються і покривають всю територію, постраждалу від НС.

В термінах двоетапної задачі оптимального розміщення місць зосередження і розподілення предметів (продуктів) першої необхідності для першочергового ЖЗН в зоні НС обмеження (4.7) передбачають, що потужність i -го центру I етапу дорівнює загальним потребам мешканців в зоні, що за ним

закріплена; умова (4.8) описує те, що кількість предметів, ввезених до i -го центру I етапу дорівнює його потужності; умова (4.3) означає, що j -ий центр II етапу може у повній мірі задовольнити потреби населення постраждалих територій і направити у відповідній кількості предмети (продукти) до центрів першого етапу; за обмежень (4.4) кожен пункт або місце зосередження і розподілення предметів першої необхідності діє на своїх зоні, зони без перекриття, але покривають всю постраждалу від НС територію.

Необхідна і достатня умова розв'язності задачі (4.1), (4.3) – (4.5), (4.7), (4.8) – наступне співвідношення:

$$\sum_{i=1}^N b_i^I = \int_{\Omega} \rho(x) dx = \sum_{j=1}^M b_j^{II}. \quad (4.9)$$

Якщо умова (4.9) не виконується, то, аналогічно переходу до закритої моделі транспортної задачі, або вводиться до розгляду фіктивний центр другого етапу, або розширюється до певної зваженої площі множина, що зонується.

Вочевидь, до математичної моделі задачі (4.1), (4.3) – (4.5), (4.7), (4.8) включено дві групи умов: обмеження (4.7) і (4.4) щодо зонування області Ω , а умови (4.3), (4.5) і (4.8) – щодо матеріальних потоків між центрами I-го і II-го етапів.

Властивість сепарабельності функціоналу задачі, а також умови (4.9), дозволяє звести розв'язання вихідної задачі до послідовного розв'язування двох:

Задача А. (оптимального розбиття множини при фіксованих центрах і обмеженнях)

$$F_1(\bar{\omega}) \rightarrow \min, \quad F_1(\bar{\omega}) = \beta_1 \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c_i^I(x, \tau_i) + a_i^I) \rho(x) dx, \text{ за умов (4.4), (4.7);}$$

Задача Б. (ЛП транспортного типу)

$$F_2(v) \rightarrow \min, \quad F_2(v) = \beta_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) v_{ij}, \text{ за умов (4.3), (4.5), (4.8).}$$

Задача А розв'язується відповідним методом, розробленим в [94].

Для задачі Б можна скористатися, приміром, методом потенціалів [7].

4.3.2. Задачі двоетапного оптимального розподілу евакуйованих потоків без обмежень

Припустимо, що у сформульованій в п. 4.1 задачі місткості пунктів первинного збору евакуйованих не відомі заздалегідь, а визначається попитом, розподіленням на території, яку вони обслуговують. У такому випадку математична модель може бути представлена задачею оптимального розбиття множин з додатковими зв'язками при фіксованих центрах підмножин без обмежень [193].

Задача 4.1.

$$\min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\}} F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\}), \quad (4.10)$$

за умов

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx = \sum_{j=1}^M v_{ij}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (4.11)$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^{II}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (4.12)$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^N, \quad (4.13)$$

$$v_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (4.14)$$

Рівності (4.11) та (4.12) разом обумовлюють потужність центрів обох етапів.

Заданими параметрами задачі є: функції $c_i^I(x, \tau_i^I)$, $i = \overline{1, N}$ – дійсні, обмежені на Ω ; $\rho(x)$ – невід'ємна, визначена на Ω функція; τ_i^I , $i = \overline{1, N}$, τ_j^{II} , $j = \overline{1, M}$ – точки області Ω ; a_i^I , a_j^{II} , $c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II})$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, M}$ – невід'ємні величини; b_j^{II} , $j = \overline{1, M}$ – невід'ємні величини, котрі задовольняють умову розв'язності задачі:

$$\sum_{j=1}^M b_j^{II} = \int_{\Omega} \rho(x) dx. \quad (4.15)$$

Введемо до розгляду вектор-функцію $\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot))$ характеристичних функцій зон, що складають розбиття Ω :

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_i, \end{cases} \quad i = \overline{1, N}.$$

Перепишемо задачу (4.10) – (4.14) в наступній постановці:

Задача 4.2.

$$I(\lambda(\cdot), v) \rightarrow \min_{(\lambda(\cdot), v) \in \Gamma \times R_{NM}^+}, \quad (4.16)$$

$$I(\lambda(\cdot), v) = \beta_1 \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (c_i^I(x, \tau_i) + a_i^I) \rho(x) \lambda_i(x) dx + \\ \beta_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) v_{ij},$$

за умов

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^{II}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (4.17)$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx, \quad i = \overline{1, N}. \quad (4.18)$$

$$\Gamma = \{\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot)): \lambda_i(x) = 0 \vee 1, \quad i = \overline{1, N}, \quad a.e. \text{ for } x \in \Omega,$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \quad a.e. \text{ for } x \in \Omega\}.$$

Здійснюємо ЛП-релаксацію задачі 4.2.

Задача 4.3. Знайти $\lambda^*(\cdot) \in \Gamma_2$ та $v^* \in R_{NM}^+$, аби

$$I(\lambda^*(\cdot), v^*) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_2, v \in R_{NM}^+} I(\lambda(\cdot), v),$$

за умов (4.17), (4.18), де

$$\Gamma_2 = \{\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot)): \lambda(\cdot) \in \Gamma, \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega\},$$

$$\Gamma = \{\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot)): 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1 \quad \forall x \in \Omega, \quad i = \overline{1, N}\}.$$

Умовами розв'язності задачі 4.3 є: 1) замкнутість, обмеженість, вимірність множини Ω ; 2) обмеженість, вимірність за змінною x функцій

$c_i^I(x, \tau_i^I)$, $i = \overline{1, N}$; 3) невід'ємність функції густини ресурсу $\rho(x) \geq 0 \forall x \in \Omega$; 4) виконання умови (4.9).

Дійсно, множина Γ_2 є обмеженою, опуклою з функціонального простору $L_2^N(\Omega)$, норма у якому визначається виразом $\|\lambda(\cdot)\| = (\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N [\lambda_i(x)]^2 dx)^{\frac{1}{2}}$. Нехай $\bar{v} \in R_{NM}^+$ – довільний фіксований вектор, котрий задовольняє умову (4.17), і розглянемо наступну задачу.

Задача 4.3 $\bar{v}$.

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma_2^{\bar{v}}} I(\lambda(\cdot), \bar{v}),$$

де

$$\Gamma_2^{\bar{v}} = \{\lambda(\cdot): 0 \leq \lambda_i(x) \leq 1, i = \overline{1, N}, \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \text{ м.в. для } x \in \Omega,$$

$$\sum_{j=1}^M \bar{v}_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx, i = \overline{1, N}\}.$$

Для кожному $\bar{v}$ множина $\Gamma_2^{\bar{v}}$ є опуклою, замкненою, обмеженою множиною з $L_2^N(\Omega)$, з кутовими точками, що відповідають характеристичним функціям деяких підмножин Ω_i , $i = 1, \dots, N$, що складають розбиття Ω . Функціонал $I(\lambda(\cdot), \bar{v})$ є лінійним відносно $\lambda(\cdot)$ і обмеженим на $\Gamma_2^{\bar{v}}$. Множина $\Gamma_2^{\bar{v}}$ має хоча б одну кутову точку. Серед множини точок $\Gamma_2^{*\bar{v}}$, в котрих $I(\lambda(\cdot), \bar{v})$ приймає найменшого на $\Gamma_2^{\bar{v}}$ значення, є хоча б одна кутова точка $\Gamma_2^{\bar{v}}$.

Критерій $I(\lambda(\cdot), \bar{v})$ можна представити у такому вигляді:

$$I(\lambda(\cdot), \bar{v}) = \beta_1 I_1(\lambda(\cdot)) + \beta_2 I_2(\bar{v}),$$

де

$$I_1(\lambda(\cdot)) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (c_i^I(x, \tau_i) + a_i^I) \rho(x) \lambda_i(x) dx,$$

$$I_2(\bar{v}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) \bar{v}_{ij}.$$

Оцінимо знизу обидва доданки:

$$I_1(\lambda(\cdot)) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i^I) + a_i^I) \rho(x) \lambda_i(x) dx \geq \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \rho(x) \min_{i=\overline{1, N}} (c(x, \tau_i^I) +$$

$$a_i^I) \lambda_i(x) dx \geq \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \rho(x) \min_{x \in \Omega} \min_{i=\overline{1, N}} (c(x, \tau_i^I) + a_i^I) \lambda_i(x) dx.$$

Позначимо $\min_{x \in \Omega} \min_{i=1, N} (c(x, \tau_i^I) + a_i^I) = c_{\min}$, $S = \int_{\Omega} \rho(x) dx$, тоді

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i^I) + a_i^I) \rho(x) \lambda_i(x) dx \geq c_{\min} S.$$

За умови (4.9) і невід'ємності величин $\bar{v}_{ij}$ виконуються нерівності:

$$0 \leq \bar{v}_{ij} \leq b_j^{II}.$$

Тоді:

$$\begin{aligned} I_2(\bar{v}) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) \bar{v}_{ij} \geq \sum_{c_{ij}^{II} \geq 0} (c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) \cdot 0 + \\ &\sum_{c_{ij}^{II} < 0} (c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) \cdot b_j^{II} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \min(0, c_{ij}^{II} + a_j^{II}) \cdot b_j^{II}. \end{aligned}$$

В силу довільності вибору $\bar{v}_{ij}$ заключаємо, що функціонал задачі **4.3** є обмеженим знизу на допустимій множині розв'язків.

Згідно узагальненої теореми Веєрштраса при кожному фіксованому $\bar{v} \in R_{NM}^+$ функціонал досягає своєї нижньої грані на Γ_2^v . А серед множини оптимальних розв'язків задачі **4.3** $\bar{v}$ є розв'язки сформульованої для $\bar{v}$ задачі **4.2**. Відтак, в силу довільності $\bar{v}$, серед множини оптимальних розв'язків задачі **4.2** знайдеться хоча б одна точка з Γ_2^v . Оскільки кутові точки множини Γ_2^v є характеристичними функціями підмножин Ω_i , $i = 1, \dots, N$, то серед розв'язків задачі **4.3** знайдеться й розв'язок задачі **4.2**.

Сформулюємо необхідні та достатні умови оптимальності для задачі **4.3**. Для цього розглянемо її функціонал Лагранжа:

$$\begin{aligned} L(\lambda(\cdot), v, \Psi(\cdot)) &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (\beta_1(c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i^I) + \psi_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx + \\ &+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) - \eta_j - \psi_i) v_{ij} + \\ &+ \sum_{j=1}^M \eta_j b_j^{II} + \int_{\Omega} \psi_0(x) (\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) - 1) dx, \end{aligned} \quad (4.19)$$

де $\lambda(\cdot) \in \Gamma$, $v \in R_{NM}^+$, $\Psi(x), x \in \Omega$ – вектор-функція, $\Psi(\cdot) \in \Lambda$, $\Lambda = \{\Psi(\cdot) = (\psi_0(\cdot), \psi, \eta): \psi_0(\cdot) \in L_{\Omega}^2, \psi \in E_N, \eta \in E_M\}$.

Пара $(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi(\cdot))$ називається сідловою точкою функціоналу (4.19) на множині $\{\{\Gamma \times R_{NM}^+\} \times \Lambda\}$, якщо мають місце така нерівність:

$$L(\{\lambda^*(\cdot), v^*\}, \Psi(\cdot)) \leq L(\{\lambda^*(\cdot), v^*\}, \Psi^*(\cdot)) \leq L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi^*(\cdot))$$

для усіх $\lambda(\cdot) \in \Gamma$, $v \in R_{NM}^+$, $\Psi(\cdot) \in \Lambda$, чи

$$\begin{aligned} L(\{\lambda^*(\cdot), v^*\}, \Psi^*(\cdot)) &= \min_{\{\lambda, v\} \in \Gamma \times R_{NM}^+} \max_{\Psi(\cdot) \in \Lambda} L(\{\lambda, v\}, \Psi(\cdot)) = \\ &= \max_{\Psi(\cdot) \in \Lambda} \min_{\{\lambda, v\} \in \Gamma \times R_{NM}^+} L(\{\lambda, v\}, \Psi(\cdot)). \end{aligned}$$

Пара $(\{\lambda(\cdot)^*, v^*\}, \Psi^*(\cdot)) \in (\{\Gamma \times R_{NM}^+\} \times \Lambda)$ складатиме сідлову точку функціоналу (4.19) тоді і тільки тоді, коли виконуватимуться наступні умови:

- 1) $L(\{\lambda(\cdot)^*, v^*\}, \Psi^*(\cdot)) \leq L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi^*(\cdot))$, $\lambda(\cdot) \in \Gamma$, $v \in R_{NM}^+$,
- 2) $\sum_{i=1}^N \lambda_i^*(x) = 1$, $\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i^*(x) dx = \sum_{j=1}^M v_{ij}$, $\sum_{i=1}^N v_{ij}^* = b_j^H$.

А це означає, що задача **4.3** еквівалентна задачі

Задачі 4.4. Знайти вектор-функцію $\{\lambda^*(\cdot), v^*\} \in \Gamma \times R_{NM}^+$ та вектор-функцію $\Psi^*(\cdot) \in \Lambda$, такі що

$$L(\{\lambda(\cdot)^*, v^*\}, \Psi^*(\cdot)) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma, v \in R_{NM}^+} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi^*(\cdot))$$

за умов

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i^*(x) = 1, \text{ м.в. для } x \in \Omega,$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij}^* = b_j^H, j = 1, 2, \dots, M,$$

$$\sum_{j=1}^M v_{ij}^* = \int_{\Omega_i} \rho(x) \lambda_i^*(x) dx, i = 1, 2, \dots, N.$$

Нехай $\bar{\Psi}(\cdot)$ – будь-яка фіксована вектор-функція з Λ , а v – довільна фіксована матриця, котра задовольняє умови (4.17), (4.18). Розглянемо задачу

$$\min_{\lambda(\cdot)} L(\lambda(\cdot), \bar{v}, \bar{\Psi}(\cdot)), \quad (4.20)$$

$$L(\lambda(\cdot), \bar{v}, \bar{\Psi}(\cdot)) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (\beta_1(c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i^I) \rho(x) + \psi_0 + \psi_i \rho(x)) \lambda_i(x) dx +$$

$$+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) - \eta_j - \psi_i) \bar{v}_{ij} + \sum_{j=1}^M \eta_j b_j^{II} - \int_{\Omega} \psi_0(x) dx,$$

за умов

$$0 \leq \lambda_i(x) \leq 1, i = \overline{1, N}. \quad (4.21)$$

Очевидно, що

$$\begin{aligned} \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} L(\lambda(\cdot), \bar{v}, \bar{\Psi}(\cdot)) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) - \eta_j - \psi_i) \bar{v}_{ij} + \\ &+ \sum_{j=1}^M \eta_j b_j^{II} - \int_{\Omega} \psi_0(x) dx + \\ &+ \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \min_{0 \leq \lambda_i(x) \leq 1} \left[(\beta_1(c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i^I) \rho(x) + \psi_0 + \psi_i \rho(x)) \lambda_i(x) \right] dx. \end{aligned}$$

Розв'язок задачі (4.20) – (4.21) записується у наступному вигляді: для будь-яких $i = \overline{1, N}$, $\Psi(\cdot) \in \Lambda$:

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \beta_1(c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i^I) \rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i \rho(x) > 0, \\ 1, & \text{якщо } \beta_1(c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i^I) \rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i \rho(x) < 0, \\ \forall \alpha \in [0, 1], & \text{якщо } (\beta_1(c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i^I) + \psi_i) \rho(x) + \psi_0(x) = 0. \end{cases}$$

З усіх $\Psi(\cdot) \in \Lambda$ вибираємо такі $\Psi^*(\cdot)$, для котрих відповідні їм $\lambda_i^*(x)$ становитимуть характеристичні функції зон Ω_i^* , $i = \overline{1, N}$, тобто для будь-яких $i = \overline{1, N}$, $x \in \Omega$

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \beta_1(c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i^I) \rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i \rho(x) > 0, \\ 1, & \text{якщо } \beta_1(c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i^I) \rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i \rho(x) = 0, \end{cases} \quad (4.22)$$

і $\text{mes}(x \in \Omega: \beta_1(c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i^I) \rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i \rho(x) < 0) = 0$.

Перша гілка в (4.22) відповідає випадку $x \notin \Omega_i^*$, за умови другої гілки $x \in \Omega_i^*$.

У випадку, коли $\bar{v} = v^*$, $\bar{\Psi}(\cdot) = \Psi^*(\cdot)$, а $\lambda^*(\cdot)$ задана формулою (4.22), пара $(\{\lambda^*(\cdot), v^*\}, \Psi^*(\cdot))$ є сідловою точкою функціоналу (4.19).

Згідно (4.22) має місце система нерівностей майже всюди для $x \in \Omega_i$:

$$\begin{cases} \beta_1(c_1^I(x, \tau_1^I) + a_1^I)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_1\rho(x) \geq 0, \\ \dots \\ \beta_1(c_{i-1}^I(x, \tau_{i-1}^I) + a_{i-1}^I)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_{i-1}\rho(x) \geq 0, \\ \beta_1(c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i^I)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_i(x) = 0, \\ \beta_1(c_{i+1}^I(x, \tau_{i+1}^I) + a_{i+1}^I)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_{i+1}\rho(x) \geq 0, \\ \dots \\ \beta_1(c_N^I(x, \tau_N^I) + a_N^I)\rho(x) + \psi_0(x) + \psi_N\rho(x) \geq 0. \end{cases}$$

З неї випливає, що

$$\psi_0(x) = -(\beta_1(c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i^I) + \psi_i)\rho(x), \text{ м. в. для } x \in \Omega_i^*, \quad (4.23)$$

з урахуванням чого j -ту, нерівність $j \neq i, j = \overline{1, N}$ системи можна записати так:

$$(\beta_1(c_j^I(x, \tau_j^I) + a_j^I) + \psi_j)\rho(x) - (\beta_1(c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i^I) + \psi_i)\rho(x) \geq 0,$$

м. в. для $x \in \Omega_i^*$.

Звідси, пам'ятаючи, що $\rho(x) \geq 0$ для $x \in \Omega$, та в силу довільності індексу $i \in \{1, \dots, N\}$, отримаємо $\beta_1(c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i^I) + \psi_i \leq \beta_1(c_j^I(x, \tau_j^I) + a_j^I) + \psi_j$ майже всюди для $x \in \Omega_i^*, i, j = \overline{1, N}$.

Неважко показати, що у разі виконання умов:

$$\rho(x) > 0, \text{ м. в. для } x \in \Omega, \quad (4.24)$$

$$mesK = 0, K = \{x \in \Omega: (c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i^I) - (c_j^I(x, \tau_j^I) + a_j^I) = const, \quad (4.25)$$

$$i \neq j, i, j = \overline{1, N}\}$$

оптимальні розв'язки задач **4.2** і **4.3** співпадають.

Для доведення необхідної умови оптимальності розбиття $(\Omega_1^*, \Omega_2^*, \dots, \Omega_N^*)$ в задачі **4.1** за обмежень (4.24), (4.25) зафіксуємо довільний вектор $\bar{v} \in R_{NM}^+$, що задовольняє умову (4.12) і розглянемо допоміжну задачу:

$$F^{\bar{v}}(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}) \rightarrow \min_{\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_{\Omega}^{N'}}, \quad (4.26)$$

за умови

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) \lambda_i(x) dx = \sum_{j=1}^M v_{ij}, i = 1, 2, \dots, N,$$

де $F^{\bar{v}}(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}) = F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\})$.

Якщо в (4.26) $\rho(x) \geq 0$ для $x \in \Omega$, а можливе розбиття $(\Omega_1^*, \Omega_2^*, \dots, \Omega_N^*) \in$ оптимальним, то існують дійсні константи $\psi_1, \dots, \psi_N$, для яких виконуються наступні нерівності:

$$\beta_1(c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i^I) + \psi_i \leq \beta_1(c_j^I(x, \tau_j^I) + a_j^I) + \psi_j \text{ для } x \in \Omega_i^*, \quad (4.27)$$

$$i, j = \overline{1, N}.$$

Побудуємо наступні функціонали:

$$X(\{\lambda(\cdot), v\}) = \max_{\Psi(\cdot) \in \Lambda} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi(\cdot)), \lambda(\cdot) \in \Gamma, v \in R_{NM}^+,$$

$$U(\Psi(\cdot)) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma, v \in R_{NM}^+} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi(\cdot)), \Psi(\cdot) \in \Lambda.$$

Розглянемо задачі:

$$X(\{\lambda(\cdot), v\}) \rightarrow \min, \lambda(\cdot) \in \Gamma, v \in R_{NM}^+, \quad (4.28)$$

$$U(\Psi(\cdot)) \rightarrow \max, \Psi(\cdot) \in \Lambda, \quad (4.29)$$

серед яких (4.28) називається **прямою задачею**, а (4.29) – **двоїстою** до неї.

Введемо до розгляду множину W :

$$W = \{(\lambda(\cdot), v): \lambda(x) \in \Gamma_2; v \in V; \sum_{j=1}^M v_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx, i = \overline{1, N}\}.$$

Задача (4.28) є еквівалентною до задачі **4.3**, тобто

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma, v \in R_{NM}^+} \max_{\Psi(\cdot) \in \Lambda} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi(\cdot)) = \min_{(\lambda(\cdot), v) \in W} I(\lambda(\cdot), v).$$

Дійсно, коли $(\lambda(\cdot), v) \in W$, мають місце такі рівності:

$$\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - \sum_{j=1}^M v_{ij} = 0, i = \overline{1, N},$$

$$b_j^{II} - \sum_{i=1}^N v_{ij} = 0, j = \overline{1, M}.$$

Якщо ж $(\lambda(\cdot), v) \notin W$, то існує або номер i , $1 \leq i \leq N$, або j , $1 \leq j \leq M$, такий що чи $\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - \sum_{j=1}^M v_{ij} \neq 0$, чи $b_j^{II} - \sum_{i=1}^N v_{ij} \neq 0$.

Тоді величину $\sum_{i=1}^N \psi_i (\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx - \sum_{j=1}^M v_{ij}) + \sum_{j=1}^M \eta_j (-\sum_{i=1}^N v_{ij} + b_j^{II})$ можна зробити дуже великою шляхом вибору ψ та η значно великими.

Відтак, $X(\lambda(\cdot), v)$ можна записати в уточненому вигляді:

$$X(\lambda(\cdot), v) = \max_{\Psi(\cdot) \in \Lambda} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi(\cdot)) = \begin{cases} I(\lambda(\cdot), v), & (\lambda(\cdot), v) \in W, \\ +\infty, & (\lambda(\cdot), v) \notin W. \end{cases}$$

Мінімум $I(\lambda(\cdot), v)$ збігається з мінімумом функціоналу $X(\lambda(\cdot), v)$:

$$\min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma, v \in R_{NM}^+} \max_{\Psi(\cdot) \in \Lambda} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi(\cdot)) = \min_{(\lambda(\cdot), v) \in W} I(\lambda(\cdot), v).$$

Оскільки виконуються такі співвідношення:

$$U(\Psi(\cdot)) = \min_{\lambda \in \Gamma, v \in R_{NM}^+} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi(\cdot)) \leq L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi(\cdot)),$$

$$U^* = \max_{\Psi(\cdot) \in \Lambda} U(\Psi(\cdot)) \leq \max_{\Psi(\cdot) \in \Lambda} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi(\cdot)) = X(\lambda(\cdot), v),$$

то за будь-яких $\lambda(\cdot) \in \Gamma, v \in R_{NM}^+, \Psi(\cdot) \in \Lambda$, справедливою є наступна нерівність:

$$U(\Psi(\cdot)) \leq U^* \leq I^* \leq X(\lambda(\cdot), v).$$

Якщо $(\{\lambda^*(\cdot), v^*\}, \Psi^*(\cdot)) \in (\{\Gamma \times R_{NM}^+\} \times \Lambda)$ – сідлова точка функціоналу (4.19), то $\{\lambda^*(\cdot), v^*\}$ та $\{\psi_0(\cdot), \psi^*, \eta^*\}$ – оптимальні розв’язки прямої та двоїстої задач відповідно, і виконується рівність

$$U(\Psi^*(\cdot)) = I(\lambda^*(\cdot), v^*).$$

Покажемо, що, за умови $\rho(x) \geq 0$ м. в. для $x \in \Omega$, пара $(\lambda^*(\cdot), v^*) \in \Gamma \times R_{NM}^+$ буде розв’язком задачі 4.3 тоді і тільки тоді, коли існуватимуть такі величини $\psi_i, i = 1, \dots, N$ та $\eta_j, j = 1, \dots, M$, за яких матимуть місце наступні умови:

1)

$$\lambda_i^*(\cdot) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (\beta_1(c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i^I) + \psi_i) = \min_k (\beta_1(c_k^I(x, \tau_k^I) + a_k^I) + \psi_k), \\ 0, & \text{якщо } (\beta_1(c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i^I) + \psi_i) \neq \min_k (\beta_1(c_k^I(x, \tau_k^I) + a_k^I) + \psi_k), \end{cases}$$

$$\forall x \in \Omega, i = \overline{1, N},$$

2)

$$\begin{cases} \beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) = \psi_i + \eta_j, & \text{якщо } v_{ij}^* > 0, \\ \beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) > \psi_i + \eta_j, & \text{якщо } v_{ij}^* = 0. \end{cases}$$

Уточнимо функціонал $U(\Psi(\cdot))$:

$$U(\Psi(\cdot)) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma, v \in R_{NM}^+} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi(\cdot)) = \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned}
&= \min_{v \in R_{NM}^+} \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} L(\{\lambda(\cdot), v\}, \Psi(\cdot)) = \\
&= \min_{v \in R_{NM}^+} \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N ((\beta_1 c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i^I) + \psi_0(x) + \psi_i) \rho(x) \lambda_i(x) dx + \\
&+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \beta_2 ((c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) - \eta_j - \psi_i) \bar{v}_{ij} + \sum_{j=1}^M b_j^{II} \eta_j - \int_{\Omega} \psi_0(x) dx.
\end{aligned}$$

З одного боку, якщо $(\lambda^*(\cdot), v^*) \in \Gamma \times R_{NM}^+$ – оптимальний розв’язок задачі 4.3, то, враховуючи (4.23), функцію $\lambda^*(\cdot) \in \Gamma$, що мінімізує першу складову виразу (4.30), можна представити у такий спосіб: $\forall x, i = \overline{1, N}$

$$\begin{aligned}
\lambda_i^*(x) &= \\
&= \begin{cases} 1, \text{ якщо } (\beta_1(c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i^I) + \psi_i) = \min_k (\beta_1(c_k^I(x, \tau_k^I) + a_k^I) + \psi_k), \\ 0, \text{ якщо } (\beta_1(c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i^I) + \psi_i) \neq \min_k (\beta_1(c_k^I(x, \tau_k^I) + a_k^I) + \psi_k), \end{cases} \quad (4.31)
\end{aligned}$$

а критерій двоїстої задачі наступним чином:

$$\begin{aligned}
U(\psi_0^*(\cdot), \psi, \eta) &= G(\psi, \eta) = \\
&= \min_{v \in R_{NM}^+} \left(\int_{\Omega} \min_{k=\overline{1, N}} (\beta_1(c_k^I(x, \tau_k^I) + a_k^I) + \psi_k) \rho(x) dx + \right. \\
&+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) - \eta_j - \psi_i) v_{ij} + \sum_{j=1}^M b_j^{II} \eta_j. \quad (4.32)
\end{aligned}$$

На множині $(E_N \times E_M)$ розглянемо функцію

$$\begin{aligned}
G(\psi, \eta) &= \int_{\Omega} \min_{k=\overline{1, N}} (\beta_1(c_k^I(x, \tau_k^I) + a_k^I) + \psi_k) \rho(x) dx + \\
&+ \min_{v \in R_{NM}^+} (\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) - \eta_j - \psi_i) v_{ij}) + \sum_{j=1}^M b_j^{II} \eta_j.
\end{aligned}$$

Очевидно

$$\begin{aligned}
\min_{v \geq 0} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) - \eta_j - \psi_i) v_{ij} &= \\
&= \begin{cases} 0, & \text{якщо } \beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) - \eta_j - \psi_i \geq 0, \\ -\infty, & \text{якщо } \beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) - \eta_j - \psi_i < 0. \end{cases} \quad (4.33)
\end{aligned}$$

Отже задача, двоїсту до (4.28), записується так:

$$G(\psi, \eta) \rightarrow \max_{\psi \in E_N, \eta \in E_M} \quad (4.34)$$

за умов

$$\psi_i - \eta_j \leq \beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}), \forall i, = \overline{1, N}, j, = \overline{1, M}.$$

Величини v_{ij}^* є компонентами оптимального розв'язку задачі **4.3** і тому задовольняють умову:

$$v_{ij}^* = \begin{cases} > 0, \text{ якщо } \beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) = \psi_i + \eta_j, \\ 0, \text{ якщо } \beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) > \psi_i + \eta_j. \end{cases}$$

Отже, доведено виконання умов **1), 2)**, коли $(\lambda^*(\cdot), v^*) \in \Gamma \times R_{NM}^+$ є розв'язком задачі **4.3**.

З іншого боку, припустимо, що мають місце умови **1)** та **2)**, і (4.30) представимо у вигляді:

$$\begin{aligned} U(\Psi(\cdot)) = \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (\beta_1(c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i^I) + \psi_0(x) + \psi_i) \rho(x) \lambda(x) dx + \\ \min_{v \in R_{NM}^+} (\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) - \eta_j - \psi_i) v_{ij} + \sum_{j=1}^M b_j^{II} \eta_j) - \\ \int_{\Omega} \psi_0(x) dx, \end{aligned}$$

Тоді мінімальне значення першого доданку $U(\Psi(\cdot))$ забезпечується умовою **1)**, а другого – умовою **2)**, позаяк

$$\begin{aligned} \min_{v \geq 0} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) - \eta_j - \psi_i) v_{ij} = \\ = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) - \eta_j - \psi_i \geq 0, \\ -\infty, \text{ якщо } \beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) - \eta_j - \psi_i < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Отже, достатність виконання нерівностей **1), 2)** для оптимальності пари $(\lambda^*(\cdot), v^*) \in \Gamma \times R_{NM}^+$ в задачі **4.3** також показано.

Якщо існує ненульовий зв'язок між центрами різних етапів $v_{ij}^* > 0$, то відповідно до умови **2)**: $\beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) = \eta_j + \psi_i$ або

$$\psi_i = -\eta_j - \beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}). \quad (4.35)$$

Згідно умови **1)**:

$$\beta_1(c_i^l(x, \tau_i^l) + a_i^l) - \psi_i = \beta_1(c_k^l(x, \tau_k^l) + a_k^l) - \psi_k, i \neq k,$$

$$\forall x \in \Omega, k = 1, \dots, N,$$

тоді межу між зонами Ω_k і Ω_i задає вираз:

$$\beta_1(c_i^l(x, \tau_i^l) + a_i^l) - \psi_i = \beta_1(c_k^l(x, \tau_k^l) + a_k^l) - \psi_k.$$

З урахуванням виразу (4.35), отримуємо:

$$\beta_1(c_i^l(x, \tau_i^l) + a_i^l) + \eta_j + \beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^l, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) = \beta_1(c_k^l(x, \tau_k^l) + a_k^l) + \eta_j + \beta_2(c_{kj}^{II}(\tau_i^l, \tau_j^{II}) + a_j^{II}), i \neq k, \forall x \in \Omega, k = 1, \dots, N.$$

Відтак, якщо точка x належатиме межі Ω_{ij}^* між зонами Ω_i^* і Ω_j^* , то для неї виконуватиметься така рівність:

$$\beta_1(c_i^l(x, \tau_i^l) + a_i^l) + \beta_2 c_{ij}^{II}(\tau_i^l, \tau_j^{II}) = \beta_1(c_k^l(x, \tau_k^l) + a_k^l) + \beta_2 c_{kj}^{II}(\tau_i^l, \tau_j^{II}).$$

Справедливим є і зворотнє твердження. Якщо $G(\psi^*, \eta^*) = I(\lambda^*(\cdot), v^*)$, $\{\lambda^*(\cdot), v^*\}$ і $\{\psi^*, \eta^*\}$ є оптимальними розв'язками прямої і двоїстої задач відповідно, то пара $(\{\lambda^*, v^*\}, \{\psi^*, \eta^*\}) \in (\Gamma \times R_{NM}^+ \times E_{N+M})$ є сідловою точкою функціоналу Лагранжа (4.19).

З еквівалентності задач 4.2 і 4.3 випливає наступне твердження.

Твердження. Нехай в задачі 4.2 $\rho(x) \geq 0$ для $x \in \Omega$. Тоді $(\lambda^*(\cdot), v^*) \in \Gamma_1 \times R_{NM}^+$ є оптимальним розв'язком задачі тоді і тільки тоді, коли існують такі значення параметрів $\psi_i, i = 1, \dots, N$ та $\eta_j, j = 1, \dots, M$, за яких мають місце умови: $\forall x \in \Omega, i = \overline{1, N}$

1)

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } (\beta_1(c_i^l(x, \tau_i^l) + a_i^l) + \psi_i) = \min_k (\beta_1(c_k^l(x, \tau_k^l) + a_k^l) + \psi_k), \\ 0, \text{ якщо } (\beta_1(c_i^l(x, \tau_i^l) + a_i^l) + \psi_i) \neq \min_k (\beta_1(c_k^l(x, \tau_k^l) + a_k^l) + \psi_k), \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} \beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^l, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) = \psi_i + \eta_j, \text{ якщо } v_{ij}^* > 0, \\ \beta_2(c_{ij}^{II}(\tau_i^l, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) > \psi_i + \eta_j, \text{ якщо } v_{ij}^* = 0. \end{cases}$$

4.3.3 Наближений алгоритм розв'язання двоетапної задачі розміщення – розподілення із заданими центрами

Припустимо, що $\rho(x) \geq 0$ для всіх $x \in \Omega$. Скористаємося методом потенціалів для розв'язання проміжної задачі ЛП транспортного типу [104].

Алгоритм 4.1.

Ініціалізація. Задати $\beta_1, \beta_2 \geq 0$, координати центрів τ_i^I, τ_j^{II} , величини $a_i^I, a_j^{II}, b_j^{II}$ $i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}$; функцію $\rho(x) \geq 0$ для $x \in \Omega$; $\varepsilon > 0$.

Задати $\lambda^{(0)}(x)$, $\forall x \in \Omega$.

1. Обчислити $b_i^{I(0)}$ згідно формули:

$$b_i^{I(0)} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i^{(0)}(x) dx, i = \overline{1, N}.$$

2. Обчислити $v_{ij}^{(0)}$, $i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}$, і $\psi_i^{(0)}$, $i = \overline{1, N}$, та $\eta_j^{(0)}$, $j = \overline{1, M}$, розв'язуючи методом потенціалів задачу:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \beta_2 (c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) v_{ij} \rightarrow \min, \quad (4.36)$$

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = b_i^I, i = \overline{1, N}, \quad (4.37)$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^{II}, j = \overline{1, M}, \quad (4.38)$$

$$v_{ij} \geq 0, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}, \quad (4.39)$$

за умов $b_i^I = b_i^{I(0)}$, $i = \overline{1, N}$.

Нехай за k кроків, $k = 1, 2, \dots$ отримані $\psi_i^{(k)}$, $i = \overline{1, N}$, та $\eta_j^{(k)}$, $j = \overline{1, M}$.

Опишемо $(k + 1)$ -й крок.

1. Обчислити $\lambda_i^{k+1}(x)$ за формулою:

$$\lambda_i^{(k+1)}(x) = \begin{cases} 1, \beta_1 (c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i^I) + \psi_i^{k+1} = \min_{s=\overline{1, N}} (\beta_1 (c_s^I(x, \tau_s^I) + a_s^I) + \psi_s^{k+1}), \\ 0 \quad \text{у протилежному випадку,} \quad i = \overline{1, N}, \forall x \in \Omega. \end{cases}$$

2. Обчислити значення $b_i^{I(k+1)}$ згідно формули:

$$b_i^{I(k+1)} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i^{(k+1)}(x) dx, i = \overline{1, N}.$$

3. Визначити значення $v_{ij}^{(k+1)}$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, M}$, $\psi_i^{(k+1)}$, $i = \overline{1, N}$, та $\eta_j^{(k+1)}$, $j = \overline{1, M}$, шляхом розв'язання задачі (4.36) – (4.39) за умов $b_i^I = b_i^{I(k+1)}$, $i = \overline{1, N}$.

4. Обчислити значення $I(\lambda(\cdot), \tau^I, \nu)$ при $\lambda_i(x) = \lambda_i^{(k+1)}(x)$, $v_{ij} = v_{ij}^{(k+1)}$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, M}$ (τ^I – фіксований вектор).

5. Якщо

$$|I(\lambda^{(k+1)}(\cdot), \tau^I, \nu^{(k+1)}) - I(\lambda^{(k)}(\cdot), \tau^I, \nu^{(k)})| \leq \varepsilon \quad (4.40)$$

чи

$$\|\lambda^{(k+1)}(\cdot) - \lambda^{(k)}(\cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon \quad (4.41)$$

виконується, то – перехід до п. 6, у протилежному випадку – до $(k + 2)$ -го коку.

6. Вважати $\lambda_i^*(x) = \lambda_i^{(m)}(x)$, $v_{ij}^* = v_{ij}^{(m)}$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, M}$, $\psi_i^* = \psi_i^{(m)}$, $i = \overline{1, N}$, и $\eta_j^* = \eta_j^{(m)}$, $j = \overline{1, M}$, де m – номер ітерації, на якій справедливою стала умова (4.40) або (4.41). Обчислити $I(\lambda(\cdot), \tau^I, \nu)$.

Алгоритм 1 описаний.

Похибка наближеного розв'язку – це абсолютна похибка **алгоритму 1**, яка містить похибки з обчислення функціоналів прямої та двоїстої задач, з наближеного обчислення інтегралів задля визначення потужностей центрів першого етапу, з округлень, з неточності початкових даних.

4.4. Двоетапна задача екстреної логістики з оптимальним розміщенням центрів первинного збору і алгоритм її розв'язання

Узагальнимо задачу (4.10) – (4.14) на випадок, коли центри першого етапу не задано заздалегідь, а їх потрібно розмістити на певній території з одночасним визначенням зон їхньої відповідальності. Паралельно будемо розглядати ситуації з обмеженими потужностями вказаних центрів і без всіляких обмежень на них. Математичними моделями таких узагальнень є наступні двоетапні задачі оптимального розміщення – розподілення, сформульовані у термінах характеристичних функцій шуканих зон відповідальності розміщуваних центрів.

Задача С1. (двоетапна задача оптимального розміщення-розподілення без обмежень на потужність центрів першого етапу)

$$I_1(\lambda(\cdot), \tau^I, \nu) \rightarrow_{(\lambda(\cdot), \tau^I, \nu) \in \Gamma \times \hat{\Omega}^N \times R_{NM}^+} \min, \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} I_1(\lambda(\cdot), \tau^I, \nu) = & \\ & = \beta_1 \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (c_i^I(x, \tau_i) + a_i^I) \rho(x) \lambda_i(x) dx \\ & + \beta_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) \nu_{ij}, \end{aligned}$$

за умов

$$\sum_{i=1}^N \nu_{ij} = b_j^{II}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (4.43)$$

$$\sum_{i=1}^N \nu_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx, \quad i = \overline{1, N}, \quad (4.44)$$

$$\Gamma = \{\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot)): \lambda_i(x) = 0 \vee 1, \quad i = \overline{1, N}, \text{ м. в. для } x \in \Omega,$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \quad \text{a. e. for } x \in \Omega\}.$$

Задача С2. (двоетапна задача оптимального розміщення-розподілення з обмеженнями на потужність центрів першого етапу)

$$I_1(\lambda(\cdot), \tau^I, \nu) \rightarrow_{(\lambda(\cdot), \tau^I, \nu) \in \Gamma \times \hat{\Omega}^N \times R_{NM}^+} \min, \quad (4.45)$$

за умов

$$\int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx = b_i^I, \quad i = \overline{1, N}, \quad (4.46)$$

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = b_i^I, \quad i = \overline{1, N}, \quad (4.47)$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^II, \quad j = \overline{1, M}, \quad (4.48)$$

$$\Gamma = \{\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot)): \lambda_i(x) = 0 \vee 1, \quad i = \overline{1, N}, \quad \text{м.в. для } x \in \Omega,$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \quad \text{м.в. для } x \in \Omega\}.$$

Всі позначення і змінні в задачах (4.42) – (4.44) і (4.45) – (4.48) суть такі, як зазначено в п. 4.1. Обмеження (4.44) та (4.47), (4.48) забезпечують баланс потужностей центрів. Вважатимемо, що мають місце умови розв'язності для задач (4.15) і (4.9).

Згідно методики розв'язання задач оптимального розбиття множин запишемо ЛП-релаксації цих задач, занурюючи множину Γ в Γ_0 :

$$\Gamma_0 = \{\lambda(\cdot) = (\lambda_1(\cdot), \dots, \lambda_N(\cdot)): \lambda_i(x) \in [0, 1], \quad i = \overline{1, N}, \quad \text{a.e. for } x \in \Omega,$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i(x) = 1 \quad \text{м.в. для } x \in \Omega\}.$$

Множини оптимальних розв'язків отриманих задач містять в собі оптимальні розв'язки відповідних задач **C1** і **C2**, а це означає, що можна розв'язувати релаксовані задачі і відбирати з усіх оптимальних розв'язків ті, які є розв'язками задач **C1** і **C2**. Застосовуючи апарат теорії двоїстості, для кожного фіксованого набору $\tau^I \in \hat{\Omega}^N$ і вектора $\nu \in R_{NM}^+$ отримуємо наступні твердження.

Твердження 1. Нехай в задачі **C1** функція $\rho(x) \geq 0$ майже всюди для $x \in \Omega$, і виконується умова (4.15). Тоді трійка $\{\lambda^*(\cdot), \tau^{I*}, \nu^*\} \in \Gamma_0 \times \hat{\Omega}^N \times R_{NM}^+$ буде оптимальним розв'язком задачі **C1** тоді і тільки тоді, коли знайдуться такі дійсні константи $\psi_1^*, \dots, \psi_N^*$ та $\eta_1^*, \dots, \eta_M^*$, за яких для $i = \overline{1, N}$ та майже всіх $x \in \Omega$

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \beta_1(c_i^l(x, \tau_i^{l*}) + a_i^l) + \psi_i^* \leq \beta_1(c_k^l(x, \tau_k^{l*}) + a_k^l) + \psi_k^*, \\ & i \neq k, \text{ м. в. для } x \in \Omega, \quad k = \overline{1, N}, \text{ тоді } x \in \Omega_i^*, \\ 0 & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

а $\tau_i^{l*}, i = \overline{1, N}, \psi_1^*, \dots, \psi_N^*$ и $\eta_1^*, \dots, \eta_M^*$ є оптимальними розв'язками наступної задачі:

$$G(\psi, \eta) \rightarrow \max, \quad \psi \in R^N, \quad \eta \in R^M, \quad (4.49)$$

де

$$\begin{aligned} G(\psi, \eta) &= \min_{\{\tau^l, v\} \in \hat{\Omega}^N \times R_{NM}^+} G_1(\{\tau^l, v\}, \psi, \eta), \\ G_1(\{\tau^l, v\}, \psi, \eta) &= \int_{\Omega} \min_{k=\overline{1, N}} (\beta_1(c_k^l(x, \tau_k^l) + a_k^l) + \psi_k) \rho(x) dx \\ &+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\beta_2(c_j^{II}(\tau_i^l, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) - \eta_j - \psi_i) v_{ij} + \sum_{j=1}^M \eta_j b_j^{II}, \end{aligned}$$

за умов

$$\beta_2(c_j^{II}(\tau_i^l, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) - \eta_j - \psi_i \geq 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M}. \quad (4.50)$$

Очевидно, умову (4.50) для $\tau_i^{l*}, v_{ij}^*, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}, \psi_1^*, \dots, \psi_N^*$ і $\eta_1^*, \dots, \eta_M^*$ можна переписати у наступному вигляді:

$$\beta_2(c_j^{II}(\tau_i^{l*}, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) - \eta_j^* - \psi_i^* > 0 \quad \text{якщо } v_{ij}^* = 0, \quad (4.51)$$

$$\beta_1(c_j^{II}(\tau_i^{l*}, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) - \eta_j^* - \psi_i^* = 0 \quad \text{якщо } v_{ij}^* > 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M}. \quad (4.52)$$

З урахуванням (4.51), (4.52) функція $P(\{\tau^l, v\}, \psi, \eta)$ набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \check{P}(\tau^l, \psi) &= \int_{\Omega} \min_{k=\overline{1, N}} (\beta_1(c_k^l(x, \tau_k^l) + a_k^l) + \psi_k) \rho(x) dx + \\ &+ \sum_{j=1}^M b_j^{II} \max_{i=\overline{1, N}} (\psi_i - \beta_2(c_j^{II}(\tau_i^l, \tau_j^{II}) + a_j^{II})). \end{aligned}$$

Твердження 2. Нехай в задачі **C2** функція $\rho(x) \geq 0$ майже всюди для $x \in \Omega$, і виконується умова (4.9). Аби трійка $\{\lambda^*(\cdot), \tau^{l*}, v^*\} \in \Gamma_0 \times \hat{\Omega}^N \times R_{NM}^+$ була оптимальним розв'язком задачі **C2** необхідним і достатнім є існування

таких значень параметрів $\psi_1^*, \dots, \psi_N^*, \varphi_1^*, \dots, \varphi_N^*$ та $\eta_1^*, \dots, \eta_M^*$, за яких для $i = \overline{1, N}$ та майже усіх $x \in \Omega$

$$\lambda_i^*(x) = \begin{cases} 1, & \beta_1(c_i^I(x, \tau_i^{I*}) + a_i^I) + \psi_i^* \leq \beta_1(c_k^I(x, \tau_k^{I*}) + a_k^I) + \psi_k^*, \\ & i \neq k, \text{ м. в. для } x \in \Omega, k = \overline{1, N}, \text{ тоді } x \in \Omega_i^*, \\ 0 & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

а τ^{I*}, v^* , разом із $\psi_1^*, \dots, \psi_N^*, \varphi_1^*, \dots, \varphi_N^*$ та $\eta_1^*, \dots, \eta_M^*$ утворюють оптимальний розв'язок наступної задачі:

$$G(\varphi, \psi, \eta) \rightarrow \max, \quad \varphi, \psi \in R^N, \quad \eta \in R^M, \quad (4.53)$$

де

$$\begin{aligned} G(\eta, \psi, \eta) &= \min_{\{\tau^I, v\} \in \widehat{\Omega}^N \times R_{NM}^+} G_1(\{\tau^I, v\}, \varphi, \psi, \eta), \\ G_1(\{\tau^I, v\}, \varphi, \psi, \eta) &= \int_{\Omega} \min_{k=\overline{1, N}} (\beta_1(c_k^I(x, \tau_k^I) + a_k^I) + \psi_k) \rho(x) dx + \\ &+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\beta_2(c_j^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) - \eta_j - \varphi_i) v_{ij} + \sum_{i=1}^N (\psi_i + \varphi_i) b_j^I + \sum_{j=1}^M \eta_j b_j^{II}, \end{aligned}$$

за умов

$$\beta_2(c_j^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) - \eta_j - \varphi_i \geq 0, \quad i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}. \quad (4.54)$$

Базуючись на необхідних і достатніх умовах оптимальності можна уточнити, що на оптимальному розв'язку $\tau_i^{I*}, v_{ij}^*, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}, \psi_1^*, \dots, \psi_N^*$ і $\eta_1^*, \dots, \eta_M^*$ виконуються наступні співвідношення:

$$\beta_2(c_j^{II}(\tau_i^{I*}, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) - \eta_j^* - \varphi_i^* > 0 \quad \text{якщо } v_{ij}^* = 0, \quad (4.55)$$

$$\beta_2(c_j^{II}(\tau_i^{I*}, \tau_j^{II}) + a_j^{II}) - \eta_j^* - \varphi_i^* = 0 \quad \text{якщо } v_{ij}^* > 0, \quad i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}. \quad (4.56)$$

Алгоритм 2, наведений нижче, розроблений для розв'язання задачі **C1**. Для зручності перепишемо (4.53) у наступному вигляді:

$$\begin{aligned}
\max_{\psi \in R^N, \eta \in R^M} G(\psi, \eta) &= \min_{\{\tau^I, v\} \in \Omega^N \times R_{NM}^+} G_1(\{\tau^I, v\}, \psi, \eta) = \\
&= \min_{\{\tau^I, v\} \in \Omega^N \times R_{NM}^+} \max_{\psi \in R^N, \eta \in R^M} G_1(\{\tau^I, v\}, \psi, \eta) = \\
&= \min_{\tau^I \in \Omega^N} \min_{v \in R_{NM}^+} \max_{\psi \in R^N, \eta \in R^M} G_1(\{\tau^I, v\}, \psi, \eta) = \min_{\tau^I \in \Omega^N} Q(\tau^I),
\end{aligned}$$

де

$$Q(\tau^I) = \min_{v \in R_{NM}^+} \max_{\psi \in R^N, \eta \in R^M} G_1(\{\tau^I, v\}, \psi, \eta).$$

Сформулюємо алгоритм розв'язання задачі **C**, а значить і еквівалентної задачі розміщення-розподілення на випадок, коли континуальна множина $\hat{\Omega}$, на якій розміщуються центри першого етапу, є прямокутною областю.

Алгоритм 2.

Ініціалізація. Задати $\beta_1, \beta_2 \geq 0$, координати другого етапів τ_j^{II} , величини $a_i^I, i = \overline{1, N}, a_j^{II}, b_j^{II}, j = \overline{1, M}$; функцію $\rho(x) \geq 0$ для $x \in \Omega$; $\varepsilon > 0$.

Вибрати $\tau^{I(0)} \in \hat{\Omega}^N$ – довільне наближення N центрів. Алгоритмом **1** обчислити значення $\lambda^{(0)}(x), \forall x \in \Omega$, і $v_{ij}^{(0)}, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}$.

Обчислити субградієнт $g_Q(\tau^{I(0)})$ функції $Q(\tau^I)$ в точці $\tau^{I(0)}$ згідно формули:

$$g_Q^{\tau_i^I} = \int_{\Omega} \rho(x) g_{c_i^I}^{\tau_i^I} \lambda_i(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M g_{c_{ij}^{II}}^{\tau_i^I} v_{ij}, \quad i = \overline{1, N},$$

при $\lambda(\cdot) = \lambda^{(0)}(\cdot)$, $v = v^{(0)}$. Тут $g_{c_i^I}^{\tau_i^I}, g_{c_{ij}^{II}}^{\tau_i^I}$ – i -і компоненти N -вимірних векторів узагальнених градієнтів $g_{c_i^I}(x, \tau)$ і $g_{c_{ij}^{II}}(\tau, \tau^{II})$ функцій $c_i^I(x, \tau_i^I)$ та $c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II})$, $i = \overline{1, \dots, N}, j = \overline{1, \dots, M}$, відповідно в точці $\tau^I = (\tau_1^I, \dots, \tau_i^I, \dots, \tau_N^I)$, $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)})$.

Задати $H_0 = I_{2N}$ і параметри r -алгоритму $\alpha > 1, \mu = \frac{1}{\alpha} < 1$.

$k = 0$.

Нехай на k -й ітерації $\tau^{I(k)}$ – вектор точок з Ω^N ; $\alpha_k = \alpha, \mu_k = \mu, \forall k$.

1. За допомогою алгоритму 1 обчислити $\lambda^{(k)}(x)$, $\forall x \in \Omega$ і $v_{ij}^{(k)}$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, M}$.

2. Обчислити субградієнт $g_Q(\tau^{I(k)})$ функції $Q(\tau^I)$ в точці $\tau^{I(k)}$ при $\lambda(\cdot) = \lambda^{(k)}(\cdot)$, $v = v^{(k)}$.

3. Визначити нове наближення $\tau^{I(k+1)}$ за формулою

$$\tau^{I(k+1)} = P_{\Omega^N} \left(\tau^{I(k)} - h_k \frac{H_k g_Q(\tau^{I(k)})}{\sqrt{(H_k g_Q(\tau^{I(k)}), g_Q(\tau^{I(k)}))}} \right),$$

де $P_{\Omega^N}(u)$ – оператор проєктування на множину $\hat{\Omega}^N$ точки u , якщо вона потрапила за її межі; $h_k \geq 0$ – множник, котрий вибрати з умови мінімуму функції за напрямом $p_k = -H_k g_Q(x^k)$.

4. Обчислити $g_Q(\tau^{I(k+1)})$ – субградієнт функції $Q(\tau^I)$ в точці $\tau^{I(k+1)}$.

Нехай $r_k = g_Q(\tau^{I(k+1)}) - g_Q(\tau^{I(k)})$.

5. Розрахувати матрицю

$$H_{k+1} = H_k + (\mu^2 - 1) \frac{H_k r_k r_k^T H_k}{(H_k r_k, r_k)} = H_k + (\mu^2 - 1) \frac{H_k r_k r_k^T H_k}{r_k^T H_k r_k}.$$

Якщо умова

$$|Q^{(k+1)} - Q^{(k)}| < \varepsilon \quad (4.57)$$

або нерівність

$$\|(\tau^{I(k)}, v^{(k)}, \psi^{(k)}, \eta^{(k)}) - (\tau^{I(k+1)}, v^{(k+1)}, \psi^{(k+1)}, \eta^{(k+1)})\| \leq \varepsilon, \varepsilon > 0, \quad (4.58)$$

виконується, то – перехід на крок 7, в протилежному випадку $k := k + 1$ та перехід на крок 2.

6. Вважати $\tau^I = \tau^{I(m)}$, $\lambda_i^*(x) = \lambda_i^{(m)}(x)$, $v_{ij}^* = v_{ij}^{(m)}$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, M}$, де m – номер ітерації, на якій стала справедливою або умова (4.57) або умова (4.58). Обчислити оптимальне значення $I_1(\lambda(\cdot), \tau^I, v)$.

Алгоритм 2 описаний.

Зауваження. В алгоритмі 2 врахування обмежень на центри першого етапу здійснюються за допомогою оператора проектування $P_{\hat{\Omega}^N}$. Тому алгоритм можна застосовувати для розв'язання неперервної двоетапної задачі розміщення-розподілення лише у випадку, коли множина $\hat{\Omega}$ – випукла, замкнена і має досить просту структуру, так, що немає необхідності знаходити проекції точки на множину, вирішуючи допоміжну задачу умовної оптимізації. Коли $\hat{\Omega}$ має складну форму, останню можна описати за допомогою обмежень-нерівностей, для врахування яких, у свою чергу, можуть бути використані негладкі штрафні функції.

Алгоритм 2 неважко пристосувати для розв'язання задачі **C2** з обмеженнями на потужності центрів першого етапу, розширюючи вектор змінних додатковим набором двоїстих змінних і розв'язуючи задачу недиференційованої оптимізації (4.53).

Повна похибка, з якою можна отримати наближений розв'язок задачі за допомогою представленого алгоритму, містить абсолютну похибку алгоритму, що є похибкою обчислення функціоналів прямої (двоїстої) задачі, похибкою (див. попередній параграф). Якщо $\Omega = \{(x_1, x_2) \in R^2: 0 \leq x_1 \leq 1; 0 \leq x_2 \leq 1\}$, а всі кратні інтеграли обчислюються повторним застосуванням формули трапецій з кроками дискретизації області $h_1 = h_2 = 1/n$, то загальна кількість вузлів інтегрування $m = (n + 1)^2$, а похибка обчислення інтегралу за областю Ω є величиною порядку $O(m^{-1})$. З такою самою похибкою визначаються і величини b_i^I , $i = \overline{1, N}$, а, відтак, вона простежується і в параметрах ψ_i , $i = \overline{1, N}$, і в функціях $\lambda_i^{k+1}(x)$. Взагалі, похибка обчислення критерія задачі є величиною порядку $O(m^{-2})$.

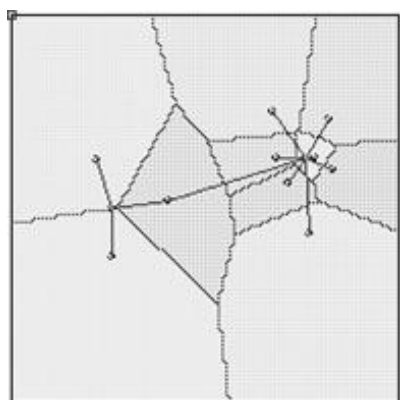
4.5 Експериментальне дослідження властивостей оптимізаційних задач двоетапної екстреної логістики та алгоритмів їх розв'язування

Перш ніж описувати результати обчислювальних експериментів, вивчено питання, наскільки важливо оптимізувати логістичні процеси одночасно на всіх етапах [194]. Для цього спочатку розв'язувалася задача розбиття одиничного квадрата на N зон з розміщенням відповідних центрів першого етапу з одночасним визначенням їх можливих зв'язків з M центрами другого етапу так, аби мінімізувати функціонал (4.1). Потім для кожної такої пари значень (N, M) при тих самих вихідних даних послідовно вирішувалися дві задачі. Перша – задача ОРМ з розміщенням центрів та критерієм якості розбиття, який дорівнює першому доданку функціоналу (4.1). Друга – задача транспортного типу з критерієм, який збігається із другим доданком в (4.1), в якому координати центрів першого етапу – ті, що отримані під час розв'язування вищезгаданої задачі ОРМ.

Так, на рис. 4.3, *а* представлено оптимальне розташування 10 центрів першого етапу, відповідні їм зони обслуговування, зазначені додаткові зв'язки між цими центрами і двома центрами другого етапу ($\beta_1 = \beta_2 = 1$). Значення цільового функціоналу при такому розміщенні-розподіленні $I = 0,33069$.

У разі окремого розв'язання двох задач – ОРМ та транспортної – отримано оптимальний розв'язок задачі оптимального розбиття квадрата з розміщенням 10 центрів, зображений на рис. 4.3, *б*. Значення цільових функціоналів $I_1 = 0,1222$ та $I_2 = 0,300964$, що в сумі складає $I_1 + I_2 = 0,423164$.

А, отже, доцільно під час математичного моделювання багатоетапних логістичних процесів із неперервно-розподіленим ресурсом використовувати моделі типу (4.1) – (4.5). Вони реалізують системний (комплексний) підхід до вивчення таких процесів, за рахунок чого дозволяють отримувати синергетичний ефект, знижуючи транспортні та інші витрати одразу на всіх етапах.



a



б

Рисунок 4.3 – Оптимальне розбиття множини Ω з розміщенням центрів в задачі: *a* – (4.1) – (4.6); *б* – ОРМ [194]

Аналіз обчислювальних експериментів з розв'язання оптимізаційних задач двоетапної екстреної логістики. Програмна реалізація Алгоритмів 1 та 2 виконана у середовищі Visual Studio 2022 на мові C#.

На попередньому етапі виконується обробка електронної карти, з неї за допомогою графічного редактора видаляються заборонені або непридатні для розміщення центрів зони регіону. Отримана область Ω вписується в прямокутник $\Pi = \{(x_1, x_2): 0 \leq x_1 \leq 12; 0 \leq x_2 \leq 12\}$. Далі для всіх модельних задач, якщо не зазначено інше, область, що зонується, пофарбована у бірюзовий колір. Параметри $r(\alpha)$ -алгоритму: $\alpha = 3$, $\mu = 0,9$, $\varepsilon = 0,0001$. Сумарні потужності центрів другого етапу дорівнюють одній умовній одиниці. Це означає, що такою самою є сумарна кількість ресурсу на території, який розподіляється між всіма центрами першого етапу.

Функції $c_i^I(x, \tau_i)$ та $c_{ij}^{II}(\tau_i, \tau_j)$ – метрика Мінковського з конкретним параметром p . Функція $\rho(x) = 1$ для всіх точок області Ω , $\beta_1 = \beta_2 = 0,5$.

Задача 1. *Неперервна задача оптимального розбиття множини із заданими центрами I етапу і додатковими зв'язками.* Вихідні дані: $N = 7$, $M = 3$; $\tau_1^I = (6,006; 3,454)$, $\tau_2^I = (7,392; 2,552)$, $\tau_3^I = (8,074; 3,916)$, $\tau_4^I = (9,372; 4,664)$, $\tau_5^I = (2,178; 9,064)$, $\tau_6^I = (3,52; 8,58)$, $\tau_7^I = (9,504; 6,82)$; $\tau_1^{II} = (6,67; 5,28)$, $\tau_2^{II} = (2,266; 5,038)$, $\tau_3^{II} = (5,258; 7,304)$; $b^{II} = (0,416; 0,156; 0,428)$. На рис. 4.4

представлено оптимальне розбиття території Ω і вказано зв'язки центрів першого та другого етапів в двох варіантах:

а) для функцій $c_i^I(x, \tau_i)$ та $c_{ij}^{II}(\tau_i, \tau_j)$ параметр метрики Мінковського $p = 1$ та $p = 2$ відповідно, $a_i^I = 0$, $i = \overline{1,7}$; $a_j^{II} = 0$, $j = \overline{1,3}$;

б) $p = 1$ для $c_i^I(x, \tau_i)$ і $c_{ij}^{II}(\tau_i, \tau_j)$; $a^I = (1, 1, 2, 3, 1, 2, 3)$, $a_j^{II} = 0$, $j = \overline{1,3}$.

Кількість зібраного ресурсу в умовних одиницях (з точністю 0.001) склала:

а) $b^I = (0,158; 0,129; 0,155; 0,146; 0,16; 0,096; 0,153)$;

б) $b^I = (0,172; 0,1682; 0,1498; 0,0627; 0,1896; 0,0669; 0,19)$.

Значення цільового функціоналу 14,973 й 36,004 відповідно.

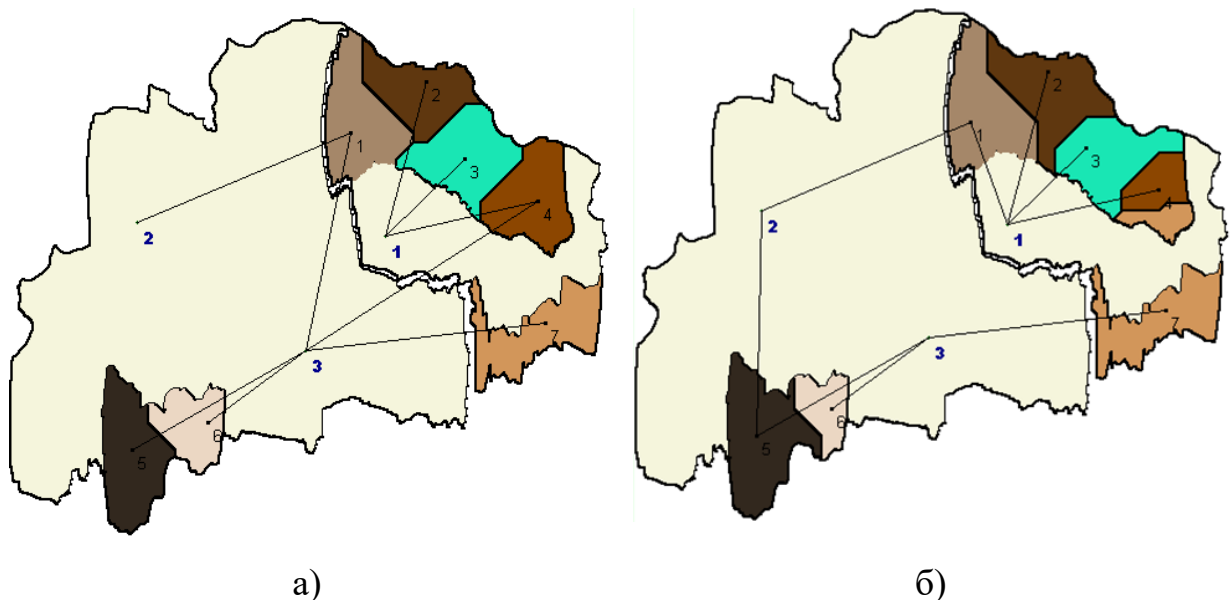


Рис. 4.4 – Оптимальне зонування території і схема транспортування ресурсу від центрів першого етапу до центрів другого етапу

Аналізуючи результати розрахунків, можна простежити, як витрати на облаштування або будівництво нових центрів першого етапу обумовлюють не лише додаткові загальні витрати, але й кількість ресурсу, що центри зможуть опанувати. Приміром, для екстреної евакуації – це мешканці, зібрані у первинних пунктах задля перерозподілу за кінцевими пунктами призначення і подальшого пересування. Як бачимо на рис. 4.4, змінюються і сервісні зони центрів першого етапу, і їх зв'язки з центрами другого етапу. У табл. 4.1

наведена кількість ресурсу, спрямованого від центрів першого до центрів другого етапу.

Задача 2. Неперервна задача ОРМДЗ з розміщенням центрів I етапу розв'язувалась за різних початкових даних.

Задача 2.1. Вхідна інформація: $N = 7$, $M = 4$; фіксовані центри другого етапу $\tau_1^I = (5,302; 6,314)$, $\tau_2^I = (8,954; 6,094)$, $\tau_3^I = (2,464; 3,784)$, $\tau_4^I = (2,134; 5,72)$; їх потужності $b^I = (0,123; 0,413; 0,192; 0,272)$; $a_i^I = 0$, $i = \overline{1,4}$, параметри метрики Мінковського $p^I = p^I = 2$. Для першого етапу початкове наближення місць розміщення центрів зазначене на рис. 4.5,а (чорний колір), центри другого етапу позначено червоним кольором.

Таблиця 4.1

Зв'язки між центрами різних етапів в задачі 2.1

За умов а)			За умов б)		
i	j	v_{ij}	i	j	v_{ij}
2	1	0,1291	1	1	0,0347
3	1	0,1561	2	1	0,1682
4	1	0,1305	3	1	0,1498
1	2	0,1562	4	1	0,0627
1	3	0,0023	1	2	0,1375
4	3	0,0156	5	2	0,0182
5	3	0,1605	5	3	0,1714
6	3	0,0961	6	3	0,0669
7	3	0,1533	7	3	0,1902

Оптимальні координати центрів першого етапу: $\tau_1^I = (6,297; 2,482)$, $\tau_2^I = (8,24; 4,064)$, $\tau_3^I = (6,527; 3,538)$, $\tau_4^I = (2,541; 9,016)$, $\tau_5^I = (7,689; 2,944)$, $\tau_6^I = (9,314; 4, 156)$, $\tau_7^I = (9,433; 7,096)$; $v_{31} = 0,0164$, $v_{51} = 0,107$, $v_{22} = 0,122$, $v_{52} = 0,004$,

$v_{62}=0,135$, $v_{72}=0,153$, $v_{13}=0,101$, $v_{33}=0,091$, $v_{34}=0,014$, $v_{44}=0,2565$. Оптимальне розбиття і додаткові зв'язки між центрами зображені на рис. 4.5, б. Оптимальне значення функціоналу 12,182 ум. грош. од. Як видно на рис. 4.5, навіть якщо спочатку спробувати розмістити центри першого етапу в довільних точках розглянутого регіону, розміщення їх на території області, де знаходяться постраждалі, хто потребує допомоги, буде все-таки найкращим.

Задача 2.2. Вхідні дані: регіон і область Ω , що розбивається, такі самі; $N = 6$, $M = 9$; $\tau_1^H = (10,23; 5,61)$, $\tau_2^H = (8,8; 5,94)$, $\tau_3^H = (4,86; 2,82)$, $\tau_4^H = (2,64; 4,49)$, $\tau_5^H = (0,75; 7,83)$, $\tau_6^H = (3,45; 6,69)$, $\tau_7^H = (5,63; 7,33)$, $\tau_8^H = (5,24; 5,08)$, $\tau_9^H = (7,5; 5,46)$; $b^H = (0,056; 0,047; 0,163; 0,046; 0,191; 0,134; 0,073; 0,171; 0,114)$; $a^I = (0,9; 0,7; 0,3; 0,9; 0,5; 0,2)$, $a_i^H = 0$, $i = \overline{1,9}$, $p^{I,H} = 1$.

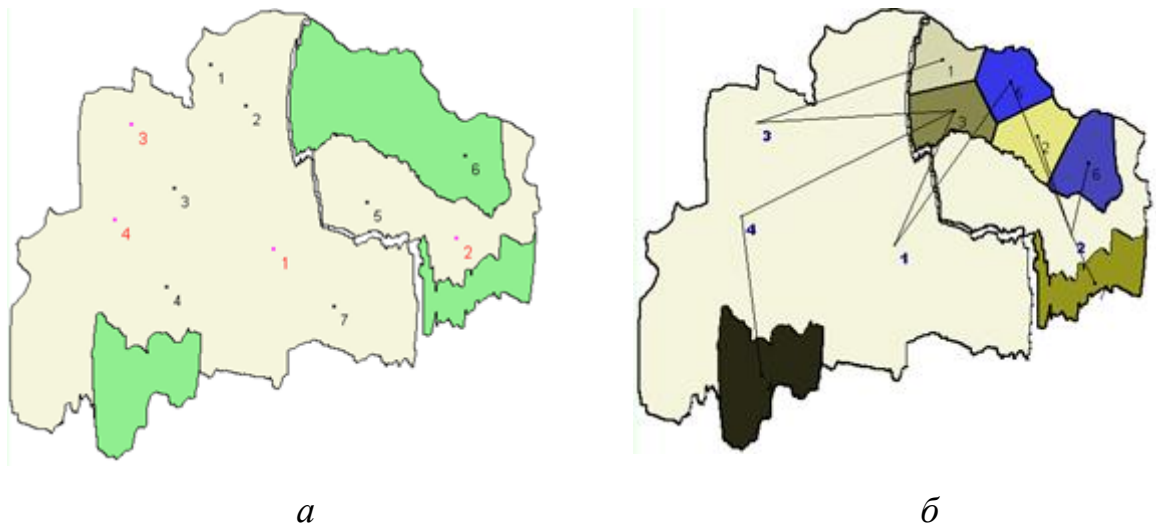


Рис. 4.5 – Ілюстрації до задачі 2.1

Рис. 4.6, а відображує розбиття та схема додаткових зв'язків, отриманих у результаті рішення ОРМДЗ з фіксованими центрами, які є початковими наближеннями для відповідної задачі з розміщенням центрів. Критерій якості в задачі при цьому склав 26,786 ум. од., а потужності центрів першого етапу $b^I = (0,212; 0,268; 0,162; 0,093; 0,107; 0,154)$.

При розв'язанні задачі ОРМДЗ з пошуком оптимального розташування центрів отримано наступні результати: $\tau_1^I=(6,25; 2,98)$, $\tau_2^I=(7,58; 3,20)$, $\tau_3^I=(2,17; 9,21)$, $\tau_4^I=(3,21; 8,7)$, $\tau_5^I=(9,38; 6,97)$, $\tau_6^I=(8,97; 4,37)$; $v_{51}=0,012$, $v_{61}=0,044$, $v_{62}=0,048$, $v_{13}=0,163$, $v_{64}=0,047$, $v_{35}=0,165$, $v_{45}=0,027$, $v_{46}=0,065$, $v_{56}=0,07$, $v_{57}=0,074$, $v_{18}=0,017$, $v_{28}=0,07$, $v_{68}=0,085$, $v_{29}=0,114$. З точністю 0,001 обсяг зібраного ресурсу склав: $b^I=(0,18; 0,184; 0,165; 0,092; 0,152; 0,224)$.

Оптимальне розбиття та зв'язки відтворено на рис. 6,б. Значення функціоналу 23,639 ум. од. Відтак, за рахунок перерозподілу деяких центрів першого етапу та їх зв'язків із центрами другого етапу вдалося скоротити сумарні витрати на 12%.

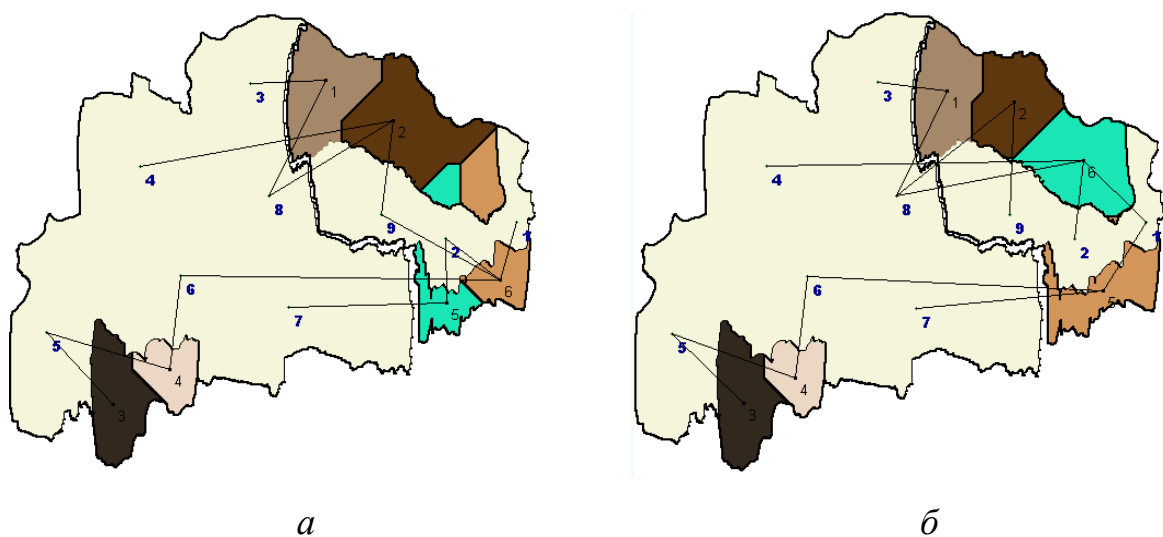


Рис. 4.6 – Ілюстрації до завдання 2.2: *а* – розв'язання задачі ОРМДЗ із фіксованими центрами; *б* – розбиття множини та схема перевезень за умови оптимального розміщення центрів

У наступних прикладах областю, що підлягає зонуванню, вважатимемо ту, яка не є зафарбованою на рис. 4.5,а. На бежевій будемо розташовувати центри другого етапу.

Задача 2.3. Вихідні дані: $N = 10$, $M = 5$; $\tau_1^{II}=(6,69;2,77)$, $\tau_2^{II}=(9,13; 4,48)$, $\tau_3^{II}=(7,26; 6,69)$, $\tau_4^{II}=(2,46; 9,06)$, $\tau_5^{II}=(0,9; 9,53)$; $b^{II}=(0,292; 0,093;$

0,311; 0,104; 0,197); $a^I = \emptyset$, $a^{II} = \emptyset$, $p^I = 8$; $p^{II} = 2$. Початкові центри першого етапу, відповідні їм зони та їхні додаткові зв'язки із центрами наступного логістичного ланцюжка показані на рис. 4.7,а. Праворуч на рисунку наведена палітра кольорів із зазначенням номерів центрів, за якими вони закріплені. Цільовий функціонал задачі (4.1) склав 41,978 ум. од.

Якщо за тих самих вихідних даних розв'язувати задачу (4.1) – (4.5), водночас розміщуючи первинні центри, то можна отримати такий оптимальний розв'язок: $\tau_1^I = (0,95; 7,66)$, $\tau_2^I = (4,58; 7,87)$, $\tau_3^I = (4,46; 6,0)$, $\tau_4^I = (9,23; 5,85)$, $\tau_5^I = (4,67; 2,53)$, $\tau_6^I = (2,75; 7,09)$, $\tau_7^I = (4,65; 4,31)$, $\tau_8^I = (2,51; 3,87)$, $\tau_9^I = (2,05; 5,58)$, $\tau_{10}^I = (6,83; 4,92)$. Кількість ресурсу, зібраного центрами першого етапу, становила (з точністю 0,001): $b^I = (0,107; 0,088; 0,099; 0,103; 0,1; 0,092; 0,099; 0,101; 0,099; 0,107)$.

Далі ресурс перерозподіляється по центрам другого етапу за такою схемою: $v_{51}=0,101$, $v_{71}=0,091$, $v_{81}=0,101$, $v_{42}=0,094$, $v_{23}=0,086$, $v_{33}=0,099$, $v_{43}=0,01$, $v_{73}=0,009$, $v_{10,3}=0,107$, $v_{24}=0,002$, $v_{64}=0,092$, $v_{94}=0,01$, $v_{15}=0,108$, $v_{95}=0,09$. Оптимальне розбиття і додаткові зв'язки представлені на рис. 4.7,б.

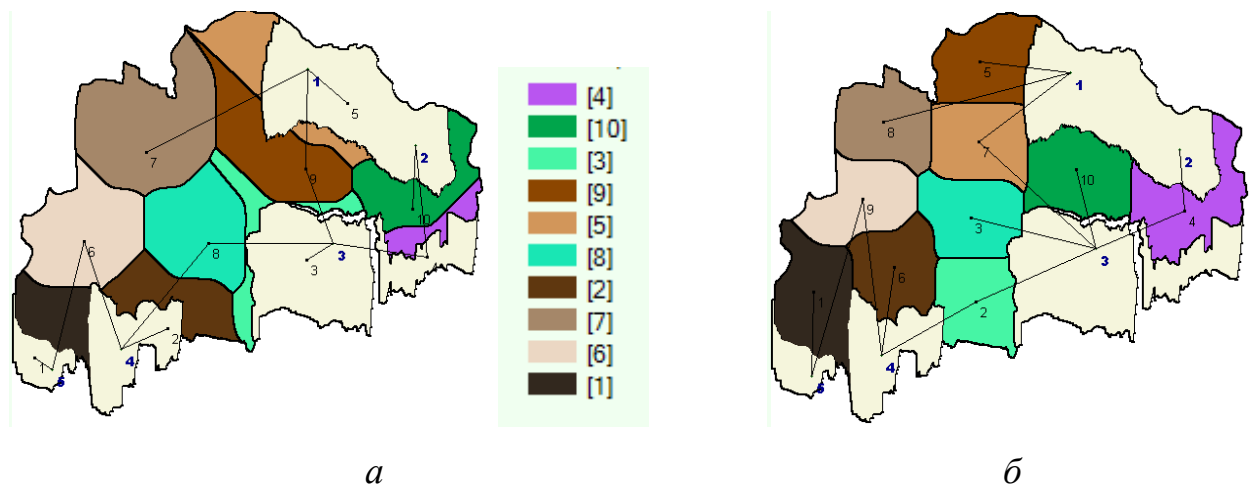


Рис. 4.7. Оптимальне розбиття області та схема перевезень ресурсу між центрами першого та другого етапів у задачі 2.3

Значення функціоналу 28.058 ум. грош. од. В цій задачі за рахунок оптимального розміщення центрів першого етапу та майже рівномірного розподілу ресурсу між цими центрами (на що вказує склад отриманого вектора b^I) вдалося зменшити величину цільового функціоналу на 33%.

Задача 2.4. Вихідні дані: $N = 8$, $M = 4$; $\tau_1^I = (7,94; 3,74)$, $\tau_2^I = (7,08; 7,08)$, $\tau_3^I = (0,4; 9,15)$, $\tau_4^I = (3,45; 8,54)$; $b^I = (0,365; 0,112; 0,319; 0,204)$; $a^I = \emptyset$, $p^{I,I} = 2$. Початкове розташування центрів першого етапу вказано на рис. 4.8, а. Вектор фіксованих витрат на організацію цих центрів ненульовий: $a^I = (0,12; 0,15; 0,18; 0,1; 0,13; 0,17)$.

На рис. 4.8, а представлено розбиття області на зони відповідальності кожного центру та додаткові їх зв'язки з центрами другого етапу. Як можна побачити, межі між зонами тут не є прямими лініями, як, приміром, на рис. 4.5, б (там використана та ж сама метрика як функції відстаней), а мають гіперболічний вигляд. Це характерно для випадку, коли $a^I \neq \emptyset$. Значення функціоналу (4.1) за таких даних дорівнює 69.967.

Оптимальне розміщення центрів першого етапу, зони їхньої відповідальності та суттєві зв'язки між центрами двох етапів показані на рис. 4.8, б.

Кількість ресурсу, зібраного в τ_i^I , і його подальший перерозподіл між τ_i^I і τ_j^I такі: $b^I = (0,137; 0,185; 0,053; 0,155; 0,161; 0,048; 0,114; 0,144)$; $v_{31} = 0,015$, $v_{41} = 0,156$, $v_{71} = 0,05$, $v_{81} = 0,144$, $v_{62} = 0,048$, $v_{72} = 0,063$, $v_{13} = 0,138$, $v_{33} = 0,038$, $v_{53} = 0,143$, $v_{24} = 0,185$. Значення функціоналу 62,606 ум. грош. од., що є меншим за початкове на 10%.

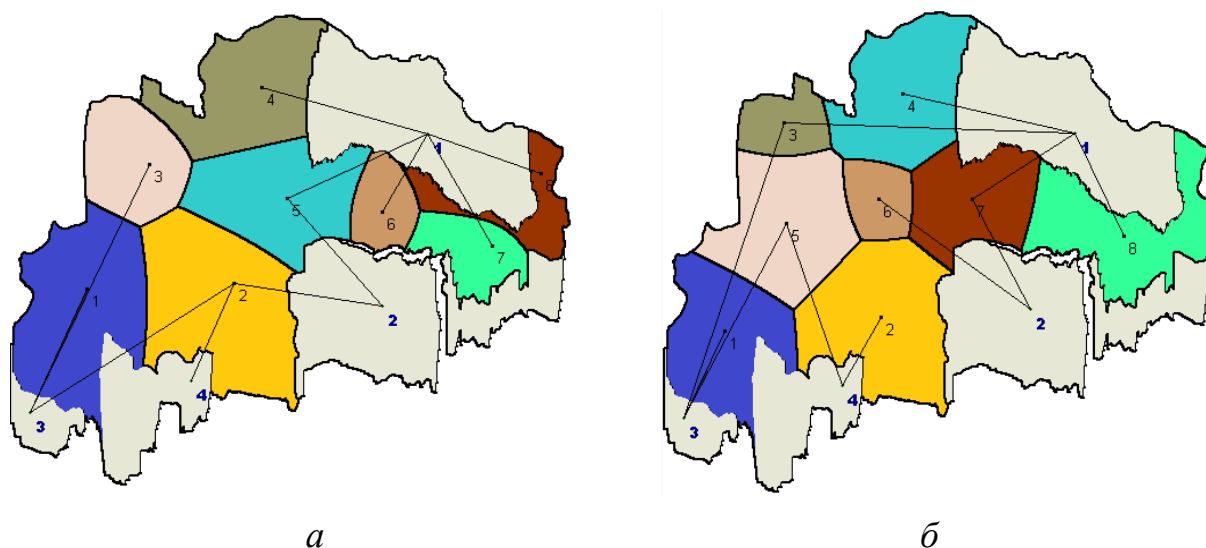


Рис. 4.8 – Оптимальне зонування території та зв'язки між центрами першого та другого етапів у задачі 2.4: центри першого етапу *а* – задані; *б* – оптимально розміщені

Зауважимо, що на практиці під час розв'язання двоетапних логістичних задач варто користуватися Google Maps Distance Matrix API для урахування дорожнього графа і пошуку на ньому найвигіднішого маршруту між точками регіону.

4.6. Оптимізація частково-двоетапних процесів розподілу матеріальних або людських ресурсів

Розглянемо задачу, в якій треба виконати планування евакуації населення з постраждалої від НС території, до центрів екстреної допомоги у відведений або найменший час при якомога менших транспортних витратах. Для ефективного планування варто врахувати, що певна частина населення може самостійно дістатися пунктів призначення, тому їй необхідно тільки вказати, куди саме вони можуть звернутися за допомогою. Евакуація решти населення має проводитися у два етапи: спочатку із небезпечної зони до пункту первинного збору, а потім до центрів екстреної допомоги. На рис. 4.9

візуалізовано схему евакуаційного процесу. Звичайно, пункти збору розраховані на певну кількість евакуйованих, а тому розподілення населення по ним потрібно проводити, враховуючи їх можливості. В загальному випадку, потрібно визначити, скільки центрів першого етапу і де треба розмістити, та яку кількість людей вони мають прийняти, аби в найкоротший термін здійснити евакуацію мешканців з постраждалої території. Останню потрібно розбити на зони, і встановити, за яку з них відповідає кожен первинний пункт збору. Важливо також уникнути перекриття або ненадання допомоги, організувавши центри у такий спосіб, аби вони покривали всю територію надзвичайної ситуації.

Побудову математичної моделі оптимізаційної задачі частково двоетапної евакуації проведемо, користуючись наступними позначеннями: Ω – постраждала від НС територія; $\hat{\Omega} \subseteq \Omega$ – зона розміщення первинних пунктів збору; $\rho(x)$ – щільність населення в точці x області Ω ; S – загальна кількість мешканців на території Ω ; $\mu(x)$ – частка населення, яке спроможне евакуюватися самостійно; N, M – число центрів першого і другого етапів (пунктів збору і кінцевого призначення); K – число категорій транспортних засобів; $Vehicle\_capacity_k$ – число пасажирів, на яке розрахований транспортний засіб k -го типу; $Park_k, k = \overline{1, K}$ – максимальна кількість ТЗ k -го типу, якою можна скористатися; $Evacuation\_period$ – максимально можливий час евакуації людей з небезпечної зони до пунктів збору; $v_{min} > 0$ – мінімальна швидкість евакуації; $\tau_i^r = (\tau_i^{(1)r}, \tau_i^{(2)r})$ – координати i -го центру r -го етапу; b_i^r – його місткість; $c_i^I(x, \tau_i^I)$ – вартість евакуації людини від $x \in \Omega$ до пункту збору; $c_{ij}^{II}(x, \tau_j^{II})$ – дотація мешканцям $x \in \Omega_i$ для самостійної евакуації; $c_{ijk}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II})$ – витрати на перевезення людини від центру τ_i^I до центру τ_j^{II} , k -тим типом ТЗ; a_i^I – вартість облаштування первинного пункту збору; Ω_i – зона центру τ_i^I ; Ω_{ij} – територія, закріплена за центром τ_i^I , з якої мешканці самостійно евакуюються до центру τ_j^{II} , при цьому $\bigcup_{j=1}^M \Omega_{ij} = \Omega$, $mes(\Omega_{is} \cap$

$\Omega_{ij}) = 0, \quad s \neq j, \quad s, j = \overline{1, M}; \quad v_{ij}, \quad i = \overline{1, N}; \quad j = \overline{1, M}$ – кількість евакуйованих;
 V_Num_{ijk} – потрібне число транспортних засобів k -го типу, $i = \overline{1, N}; \quad j = \overline{1, M}$,
 $k = \overline{1, K}$.

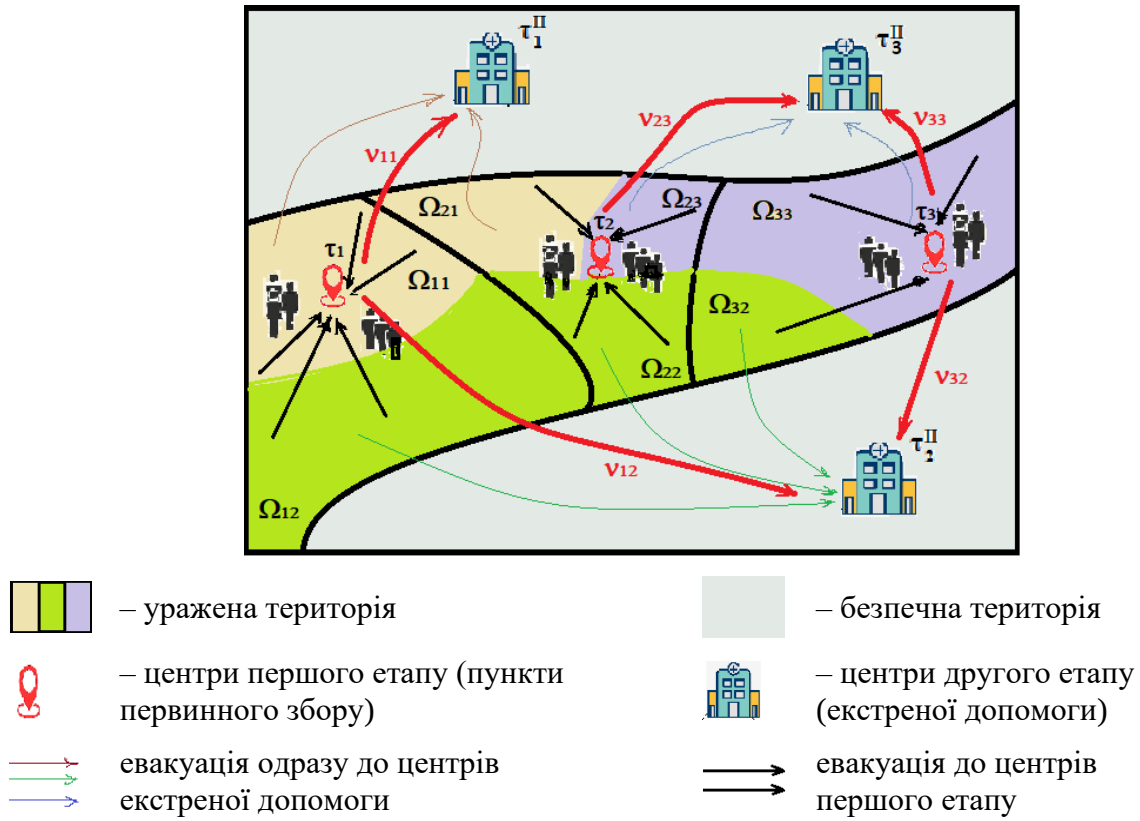


Рис. 4.9. Напрямок руху евакуаційних потоків з постраждалої від НС території Ω

Якщо Σ_{Ω}^N – клас всіх можливих розбиттів $\bar{\omega} = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\}$ множини Ω на N зон, то для $i = 1, 2, \dots, N$ $\Sigma_{\Omega_i}^M$ – це клас усіх можливих розбиттів Ω_i на M зон:

$$\Sigma_{\Omega_i}^M = \left\{ \bar{\zeta}_i = \{\Omega_{i1}, \Omega_{i2}, \dots, \Omega_{iM}\} : \bigcup_{j=1}^M \Omega_{ij} = \Omega_i, \quad mes(\Omega_{is} \cap \Omega_{ij}) = 0, \right. \\ \left. s \neq j, \quad s, j = \overline{1, M} \right\}.$$

Клас всіх можливих розбиттів Ω на NM підмножин має вигляд:

$$\begin{aligned}\Sigma_{\Omega}^{NM} &= \{\bar{\zeta} = \{\bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2, \dots, \bar{\zeta}_N\}: \bar{\zeta}_i \in \Sigma_{\Omega_i}^M, i = \overline{1, N}, \\ \cup_{i=1}^N \Omega_i &= \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_q) = 0, i \neq q, i, q = \overline{1, N}\}.\end{aligned}\quad (4.59)$$

Задача: потрібно знайти таке розбиття $\bar{\zeta} = \{\bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2, \dots, \bar{\zeta}_N\}$ множини Ω на NM підмножин і визначити такі $\tau_1^I, \dots, \tau_N^I$, $v = \{v_{11}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{NM}\}$ та $V\_Num = \{V\_Num_{ijk}\}, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}, k = \overline{1, K}$, за яких

$$F(\bar{\zeta}, \tau^I, v, V\_Num) \rightarrow \min, \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned}F(\bar{\zeta}, \tau^I, v, V\_Num) &= \\ &= \beta_1 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \int_{\Omega_{ij}} (c_i^I(x, \tau_i^I) + a_i^I) (1 - \mu(x)) \rho(x) dx + \\ &+ \beta_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^K c_{ijk}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) \cdot V\_Num_{ijk} + \\ &+ \beta_3 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \int_{\Omega_{ij}} c_{ij}^{II}(x, \tau_j^{II}) \mu(x) \rho(x) dx;\end{aligned}$$

за умов

$$\int_{\Omega_i} (1 - \mu(x)) \rho(x) dx = \sum_{j=1}^M v_{ij}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (4.61)$$

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_{ij}} \mu(x) \rho(x) dx + v_{ij} = b_j^{II}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (4.62)$$

$$\sum_{k=1}^K \text{Vehicle\_capacity}_k \cdot V\_Num_{ijk} \geq v_{ij}, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}, \quad (4.63)$$

$$\frac{1}{v\_min} \sup_{x \in \Omega} \min_{i=1, \dots, N} d(x, \tau_i^I) \leq \text{Evacuation\_period}, \quad (4.64)$$

$$0 \leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M V\_Num_{ijk} \leq \text{Park}_k, k = \overline{1, K}, \quad (4.65)$$

$$\bar{\zeta} \in \Sigma_{\Omega}^{NM}, \quad v \in R_{NM}^+, \quad V\_Num \in Z_{NMK}^+, \quad \tau^I \in \hat{\Omega}^N, \quad (4.66)$$

де $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \geq 0, \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 \neq 0$ – коефіцієнти, які задають пріоритет доданків, враховують їх приведення до однієї розмірності і нормування; $d(x, \tau_i^l)$ – відстань між x та τ_i^l .

Кожен доданок у цільовому функціоналі задачі (4.60) – (4.66) враховує певні витрати: перший – на відкриття і облаштування первинних пунктів збору і на транспортування до них населення; другий – на оренду транспортних засобів і перевезення людей між центрами першого і другого етапів; третій – на дотації населенню, котре самостійно добирається до кінцевого пункту.

Обмеження (4.61) відповідає за перерозподіл і перевезення до центрів екстреної допомоги всіх зібраних в первинних пунктах людей. За умови (4.62) центри другого етапу розраховані на усіх нужденних. Обмеження (4.63) і (4.65) пов'язані із використанням автомобілів різних типів і враховують наявний транспортний парк. Умова (4.64) визначає максимально допустимий термін евакуації.

За постановкою, задача (4.60) – (4.66) є новою та, через її дискретно-неперервний характер, вимагає інтеграції методів ОРМ і дискретної оптимізації, теоретичного дослідження і обґрунтування необхідних та достатніх умов оптимальності розв'язків.

4.7. Висновки за розділом IV

Розроблено моделі логістичних процесів в ієрархічних системах екстреної і гуманітарної логістики, які складають в інформаційній технології територіальної сегментації математичне забезпечення підсистеми прийняття виважених рішень щодо багатоетапного розподілу матеріальних потоків між структурними підрозділами СЕЛ.

Теоретично обґрунтовано використання математичних моделей і методів розв'язання задач оптимального розбиття континуальних множин з

розміщенням центрів та додатковими зв'язками (ОРМДЗ) під час дослідження двоетапних задач екстреної і гуманітарної логістики, що дозволяє використовувати їх в інформаційних технологіях систем екстреної логістики і розробляти рекомендації щодо організації багатоетапних процесів розподілу матеріальних потоків в логістичних системах, узгоджуючи локальні інтереси окремих їх елементів із загальними цілями функціонування таких систем.

Визначена універсальність моделей задач ОРМДЗ шляхом їх використання для опису і евакуаційних процесів з організацією збірних та приймальних пунктів, і процесів надання первинної допомоги нужденним. Показано, що в окремому випадку, коли потужності центрів першого етапу є фіксованими, реалізація побудованої моделі зводиться до послідовного розв'язання двох задач: 1) неперервної задачі ОРМ з розміщенням центрів; 2) задачі лінійного програмування транспортного типу. Наведено умову розв'язності такої задачі.

Запропонований метод розв'язання неперервної лінійної задачі ОРМДЗ у випадку, коли потужності центрів першого етапу потрібно оцінити в процесі пошуку оптимального розбиття області. Сформульовано два алгоритми: перший – для задачі з фіксованими центрами першого етапу, другий – коли їх потрібно розмістити на певній території заданого регіону.

Проведено експериментальне дослідження роботи алгоритмів розв'язування двоетапних оптимізаційних задач екстреної логістики. Результати експериментального моделювання двоетапних евакуаційних процесів свідчать про коректність роботи алгоритмів, доцільність математичного опису двоетапних задач оптимізації матеріальних потоків в транспортно-логістичних системах за допомогою неперервних задач ОРМДЗ. На тестових задачах показано, що враховуючи під час розміщення центрів першого етапу наявність додаткових їх зв'язків виграш в значенні функціоналу може досягати 20% і більше у порівнянні з задачами, коли спочатку визначаються оптимальні координати центрів першого етапу і їх потужності, а потім визначаються величини матеріальних потоків між всіма

центрами в логістичній системі. Достовірність отриманих результатів підтверджується їх відповідністю логічним аргументованим очікуванням, узгодженістю з теоретичними висновками.

Розроблені математичні моделі задач частково-двоетапного розподілу матеріальних ресурсів в багаторівневих логістичних системах на основі неперервних задач оптимального розбиття множин, які враховують напрям руху потоку і можливість доставки частини ресурсу безпосередньо до кінцевих пунктів, що дозволяє описувати та розв'язувати широке коло логістичних задач, створювати на їх основі нові інформаційні технології задля раціонального управління матеріальними потоками в багаторівневих структурах.

Основні положення цього розділу викладені у публікаціях автора [191 – 201].

РОЗДІЛ V

РОЗРОБКА І ЗАСТОСУВАННЯ ПРОГРАМНОГО ДОДАТКУ ДЛЯ ЗАВЧАСНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ СИСТЕМИ ЕКСТРЕНОЇ ЛОГІСТИКИ НА ВИПАДОК НАДЗВИЧАЙНОЇ СИТУАЦІЇ В РЕГІОНІ

В даному розділі продемонстровано можливість спільного застосування математичного забезпечення, розробленого для розв'язання оптимізаційних задач екстреної логістики, і геоінформаційних систем. Запропоновані у попередніх розділах моделі оптимізаційних задач і методи їх розв'язання впроваджені в інформаційній технології завчасної територіальної сегментації в системах екстреної логістики.

5.1. Опис процесу розробки програмного додатку для територіальної сегментації в системі екстреної логістики

5.1.1. Фактори, що враховуються під час зонування території у разі надзвичайної ситуації

Вибір місць для розміщення аварійно-рятувальних служб і сил ліквідації надзвичайних ситуацій або перепрофілювання наявних підприємств під нагальні потреби населення слід здійснювати обґрунтовано, із застосуванням відповідного прикладного інструментарію. Під час реалізації конкретних заходів екстреної логістики перед особами, які приймають рішення, стають задачі:

- пошук найкращих маршрутів пересування аварійно-рятувальних служб та сил ліквідації надзвичайних ситуацій;
- розробки евакуаційних шляхів для населення із небезпечних зон до безпечних місць, зокрема, до різного роду укриття та споруд цивільної оборони;
- визначення необхідної кількості сил і засобів, розробки стратегії і

тактики надання допомоги;

– прогнозу розвитку надзвичайних подій для розробки запобіжних заходів і пом'якшення негативного впливу на населення та довкілля.

Прийняття більш ефективних рішень сприяє використанню сучасних ГІС, які дозволяють створювати банки цифрової геопросторової інформації задля оцінювання ризиків природних загроз і техногенних аварій, приміром зсуви ґрунту або пожежі. За допомогою синхронізованої з ГІС підсистеми аудитів можна виявляти погіршення стану обладнання та об'єктів, які безпосередньо впливають на безпеку населення (підтвердження відповідності вимогам пожежної безпеки будівель чи споруд, справність пожежних гідрантів тощо).

На основі інтеграції розроблених математичних моделей і методів розв'язання неперервних задач оптимального розміщення-розподілення і геоінформаційних систем можна створити технологію інтелектуального розташування підрозділів системи екстреної логістики з одночасним визначенням зон їх відповідальності, використовуючи просторовий аналіз і дані в реальному часі. Така технологія, збагачена ГІС, спрямована поєднати геодані з низкою інформаційних шарів (наприклад, інтелектуальне ведення заходів, пов'язаних із евакуацією населення з місць, постраждалих від НС) в інтерактивні карти.

У процесі дослідження можливості застосування ГІС технологій під час розв'язування задач ОМРМ, багатократного покриття, двоетапних задач розміщення-розподілення, що є моделями оптимізаційних задач екстреної логістики, вибір платформи ГІС обумовлений її можливістю шукати найкоротший шлях між будь-якими двома точками на карті і розраховувати його довжину. Такою є система QGIS, її можна використовувати для розв'язування практичних задач екстреної логістики, що розглядаються в даній роботі.

Геоінформаційні технології можна використовувати у двох варіантах. По-перше, виклик зовнішньої програми – геоінформаційної системи – може

бути передбачений на етапі розрахунку довжини шляху між точками на карті і потенційними або існуючими центрами. По-друге, можна здійснити розширення можливостей існуючої ГІС за рахунок реалізації в ній методів OMPM, багатократного кульового покриття множин і двоетапних задач розміщення-розподілення.

Ресурсом (з відкритою ліцензією) для отримання безкоштовних даних щодо вулиць, доріг, шкіл, медичних закладів, вокзалів та інших об'єктів з усього світу є база даних OSM (OpenStreetMap). Доступу до інформації з OSM в ГІС-форматі інтегрований в QGIS. А отже, на підготовчому етапі розробки інформаційної технології територіальної сегментації в системах екстреної логістики здійснюється пошук і завантаження карт з бази OSM в ГІС систему.

Хоча згадані вище системи характеризуються широким колом функціональних можливостей, вони дозволяють визначати шляхи лише між точками дорожньої мережі. Для розрахунку відстаней між двома довільними точками на карті будемо використовувати сервіс Google Maps API, оскільки ця служба надає дані про протяжність маршруту між двома пунктами, які можуть задаватися або адресою, або географічними координатами. Відправка адреси здійснюється її геокодуванням та перетворенням у координати широта/довгота. Інформація, яка повертається, ґрунтується на найкоротшому маршруті за розрахунками Google Maps API. До того ж, остання дозволяє задати деякі додаткові параметри, наприклад, спосіб руху, перешкоди та ін.

Під час розв'язання реальних практичних задач розміщення-розподілення виникає необхідність врахування складної форми області, в якій розміщуються об'єкти. Іноді потрібно уникати заборонених зон (приміром, забудовану територію, річки, заповідники і т.ін.). У розробленому програмному забезпеченні передбачено два способи аналітичного опису множин зі складними межами.

Перший, найпростіший, підхід – кодування елементів зображень або їх сканування піксель за пікселем. Зображення (карта, рисунок) регіону, який зонується, підлягає попередній обробці, в процесі якої за допомогою будь-

якого графічного редактору з рисунку видаляються заборонені зони і об'єкти, які не належать області, що розглядається. Отримана допустима область Ω погружається у прямокутник, який надалі підлягає процесу дискретизації. Функція, що задає щільність населення, визначається в кожній точці сітки так, аби вона збігалась із заданою на області Ω , що зонується і на якій розміщуються нові об'єкти, і дорівнювала нулю, якщо точка не належить множині Ω .

Описати геометричні об'єкти складної форми можна, користуючись апаратом R-функцій, як це представлено у розділі 3.

Аби уникнути вихід центрів за границі допустимої множини в розробленому програмному додатку на кожній ітерації r-алгоритму Шора перевіряється умова приналежності центрів допустимій множині. Якщо певний центр виявляється у забороненій зоні, то розраховується його «псевдопроекція» на допустиму множину. Псевдопроекція точки $z \in E^2$ на замкнену множину $\Omega \in E^2$ – це точка $v \in \Omega \cap D(z)$, така що

$$\text{dist}(z, v) = \min_{x \in \Omega \cap D(z)} \text{dist}(z, x),$$

де множина $D(z) = \{v = z + \mu w, \mu \in R, w \in \{e_1, e_2\}\}$, e_1, e_2 – орти осей координат, $\text{dist}(z, v)$ – відстань між двома точками.

5.1.2 Загальна структура розробленого багатофункціонального програмного додатку оптимального розташування підрозділів системи екстреної логістики

Технологія передбачає розв'язання задачі розміщення підрозділів системи екстреної логістики з одночасною територіальною сегментацією регіону в два кроки задля зменшення кількості запитів до сервісу Google Maps Distance Matrix API. На першому кроці вирішується задача **A2-k** з відповідним критерієм, в якому відстані між двома точками обчислюються за допомогою

однієї з відомих метрик. На другому кроці для заданого регіону визначається оптимальне розбиття k -го порядку, підключаючи ГІС для пошуку фактичної відстані між розташованими центрами і точками регіону.

На рис. 5.1 відображена узагальнена структура програмного продукту OMPS-15 [142], який розроблений для розв'язання задач оптимального мультиплексного розбиття множин, що є математичними моделями задач оптимального розміщення захисних споруд або складів предметів першої необхідності на випадок НС.

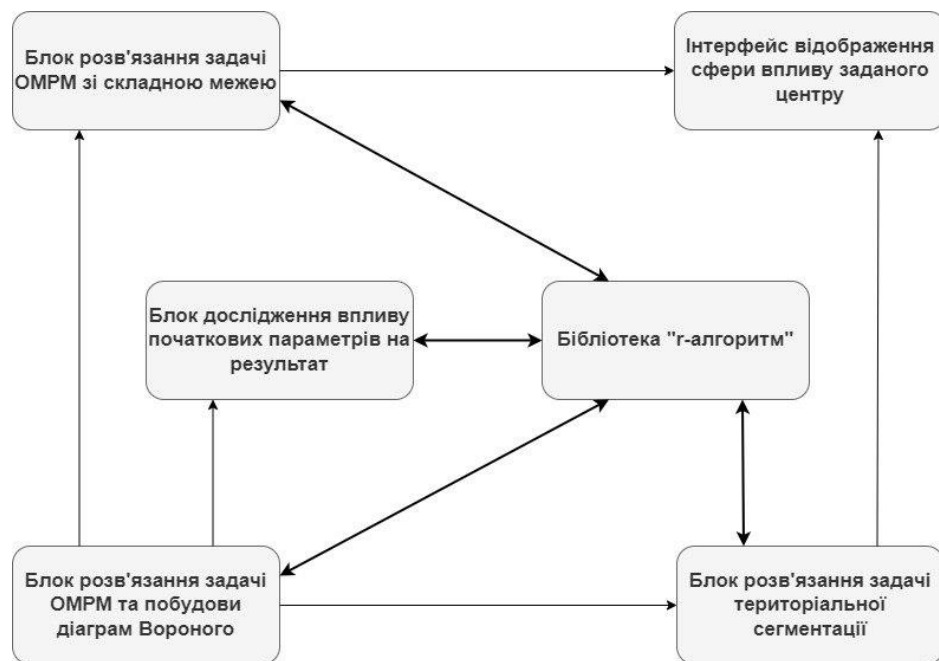


Рис. 5.1 Структура програми OMPS-15

На рис. 5.2 представлена структурна схема програми OMP&C, яка є розширенням вищезгаданої на випадок розв'язання двоетапних задач розміщення-розподілення, а також неперервних задач багатократного покриття множин, які є моделями задач оптимального розташування рятувальних служб в системах екстреної логістики.

Контекстна діаграма розробленої інформаційної технології представлено на рис. 5.3. UML діаграму діяльності для розв'язання задач зонування і розміщення структурних підрозділів системи екстреної логістики подано на рис. 5.4.

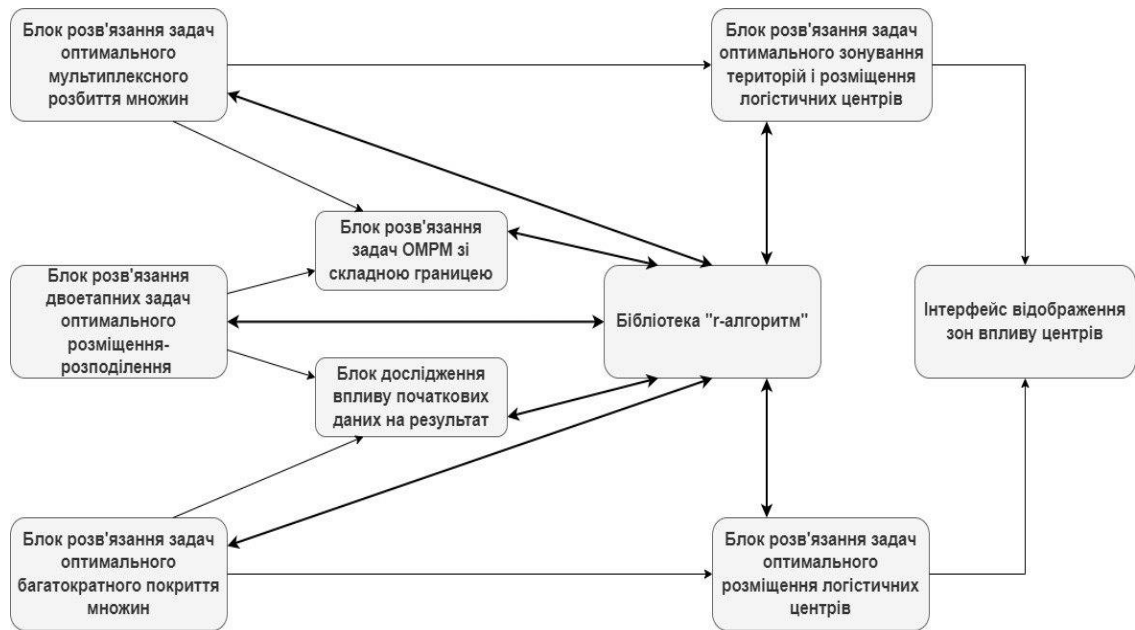


Рис. 5.2 Структура програми OMP&C – розширення OMPS-15 розв'язанням двостайпних задач розміщення-розподілення і багатократного покриття

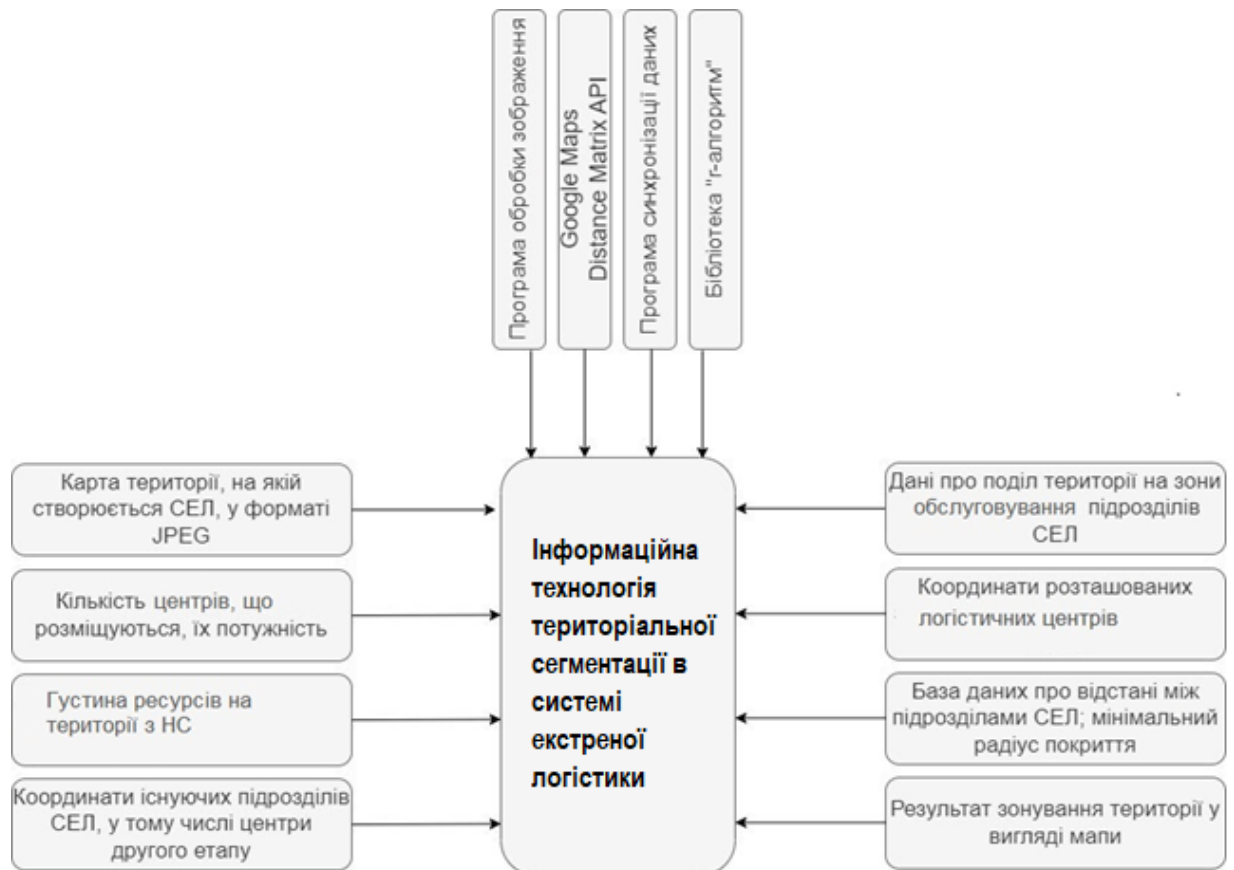


Рис. 5.3 Контекстна діаграма програмного додатку оптимізації системи екстреної логістики

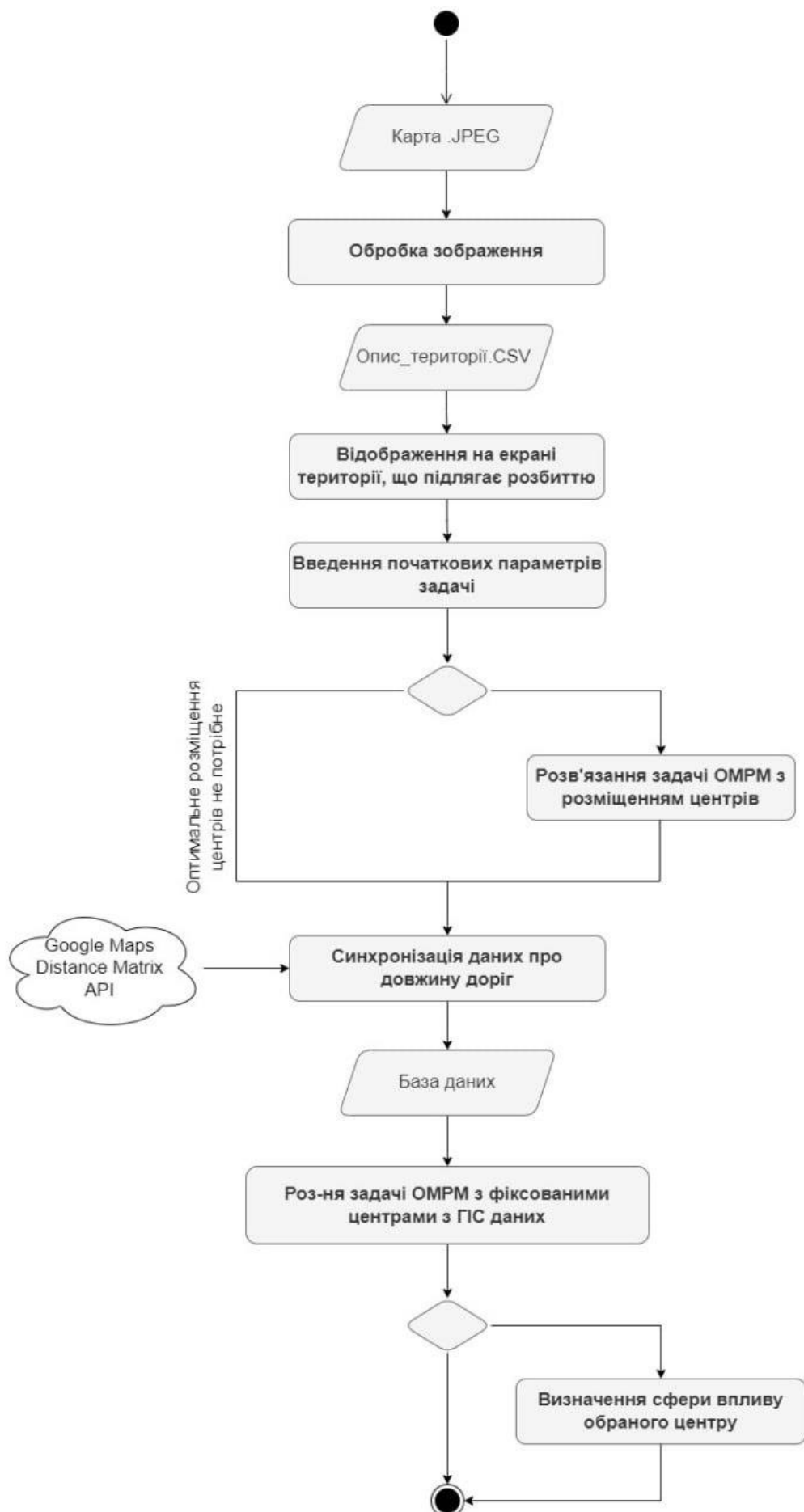


Рис. 5.4 Розв'язання задач екстреної логістики: UML діаграма діяльності

На рис. 5.5 наведено загальний опис розробленого програмного додатку, яка дозволяє завчасно оптимізувати структуру системи екстреної логістики на випадок НС в регіоні, визначаючи координати розміщення її підрозділів і території, що закріплюються за ними. Крім того, у випадку необхідності організації двоетапних процесів евакуації населення з постраждалих територій створений додаток надає можливість оцінити оптимальні людські потоки між первинними пунктами збору та пунктами кінцевого розміщення постраждалого населення, а у разі необхідності визначення місць розташування аварійних служб – оцінити мінімально можливий час, за який рятувальна служба може дістатися навіть до найвіддаленішого потенційного потерпілого.

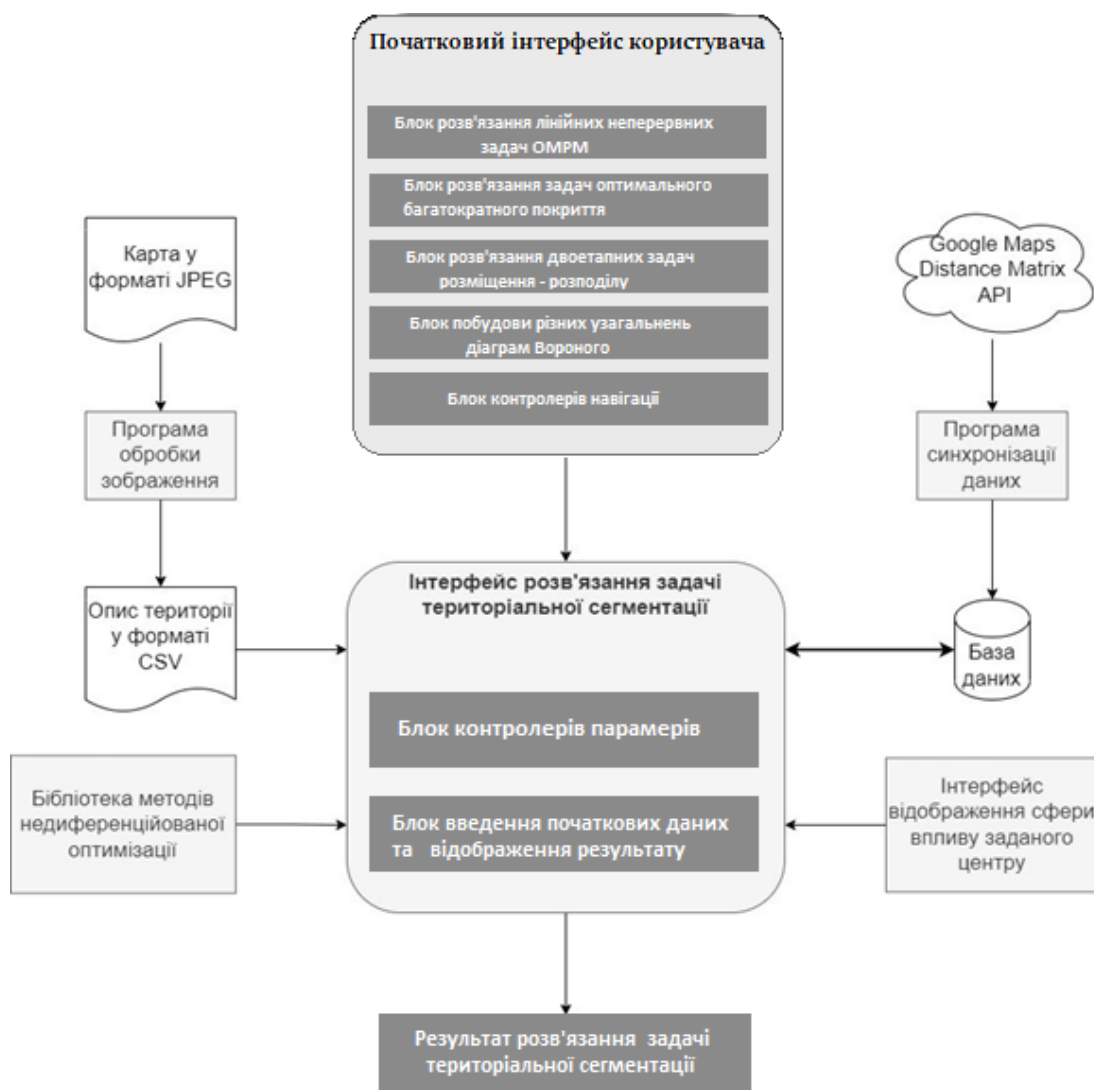


Рис. 5.5 Загальний опис програмного додатку

5.2. Приклади зонування територій та оптимального розміщення складів аварійного постачання й розподілу предметів першої необхідності

Продемонструємо використання розробленого математичного та програмного забезпечення задач ОМРМ та багатоетапних розміщення-розподілу із вбудованою функцією звернення до геоінформаційної системи на прикладах розв'язання модельних задач зонування територій та оптимального розміщення підрозділів системи екстреної логістики в деяких регіонах.

Спочатку розглянемо модельну задачу зонування м. Дніпра для п'ятнадцяти відділень вантажних перевезень «Нової пошти» (рис. 5.6).

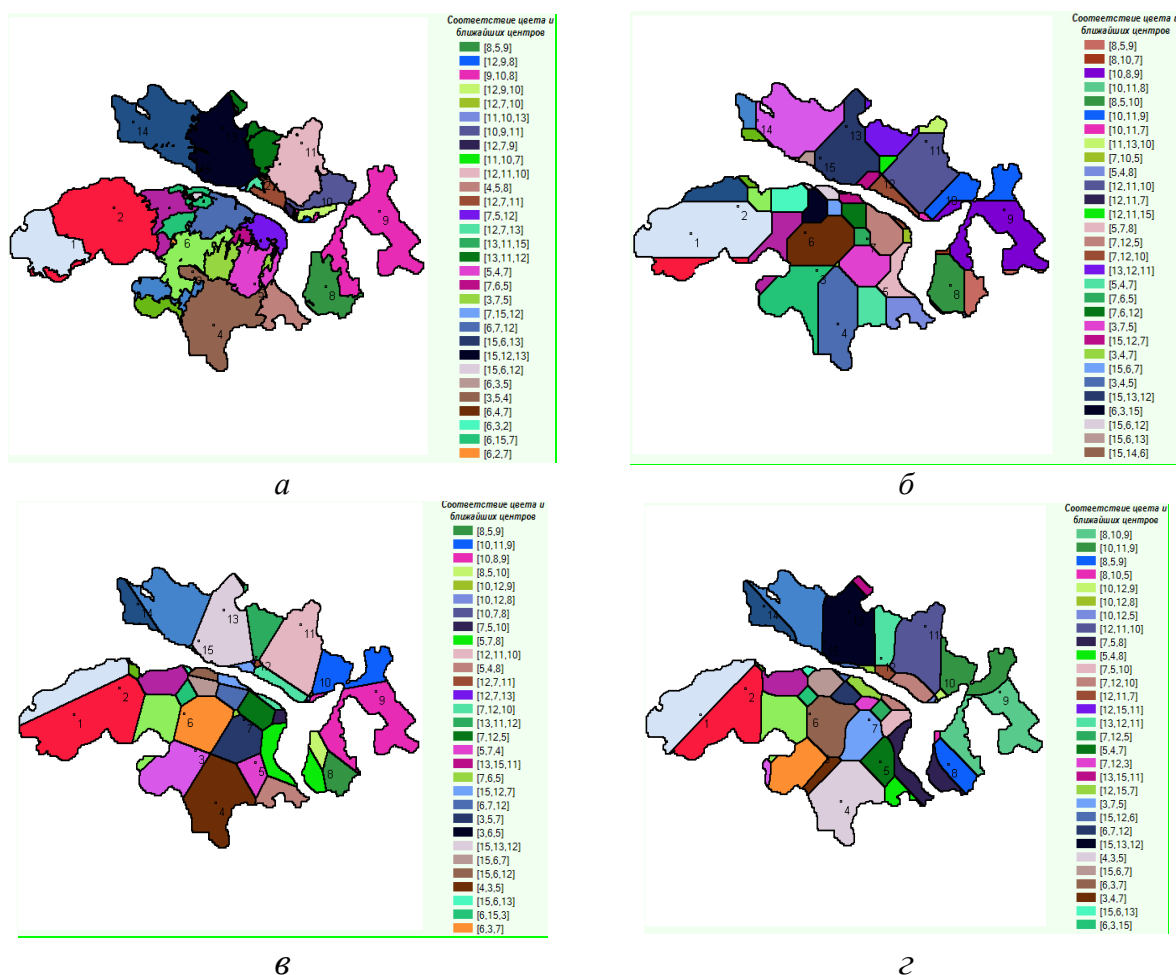


Рис. 5.6 Оптимальне зонування з трикратним перекриттям зон м. Дніпра для 15 центрів. Відстань між двома точками на карті розраховувалась за допомогою: а) ГІС технологій, б) Манхеттенської метрики, в) евклідової метрики, г) метрики Мінковського ($p = 10$)

На рис. 5.6 *а* представлене розбиття міста на зони обслуговування у припущенні, що мешканці міста для того, аби скористатися поштовими послугами, вважають однаково привабливими $k = 3$ найближчих центрів. Відтак, у функціоналі задачі **A1**- k центри $N = 15$, $w_i = 1$, $a_i = 0$, $i = \overline{1, N}$.

Відстані від центрів до точок міста визначені за допомогою ГІС. Для порівняння, на рис. 5.6 *б, в, г* наведені результати розбиття 3-го порядку тієї самої території, отримані на основі теоретичних метрик для відстаней між двома точками (на рис. 5.6 *б* – розбиття з використанням Манхеттенської метрики; рис. 5.6 *в* – евклідової метрики; рис. 5.6 *г* – метрики Мінковського з параметром $p = 10$). На всіх рисунках праворуч зазначена кольорова палітра із вказівкою списку номерів центрів, які обслуговують відповідну зону.

Результати наведених та інших обчислювальних експериментів свідчать про те, що для міста Дніпра найбільш адекватною щодо розрахунку відстані між двома точками на карті міста є Манхеттенська метрика. Тому у подальшому, під час розв'язання задач зонування районів міста, а також задач розміщення на його території підрозділів системи екстреної логістики з одночасним визначенням зон їх відповідальності можна використовувати саме цю метрику. На рис. 5.7 наведено дуплексне розбиття ($k=2$) м. Дніпра в модельній задачі оптимального розміщення 9-ти підрозділів системи екстреної логістики із зонуванням території міста.

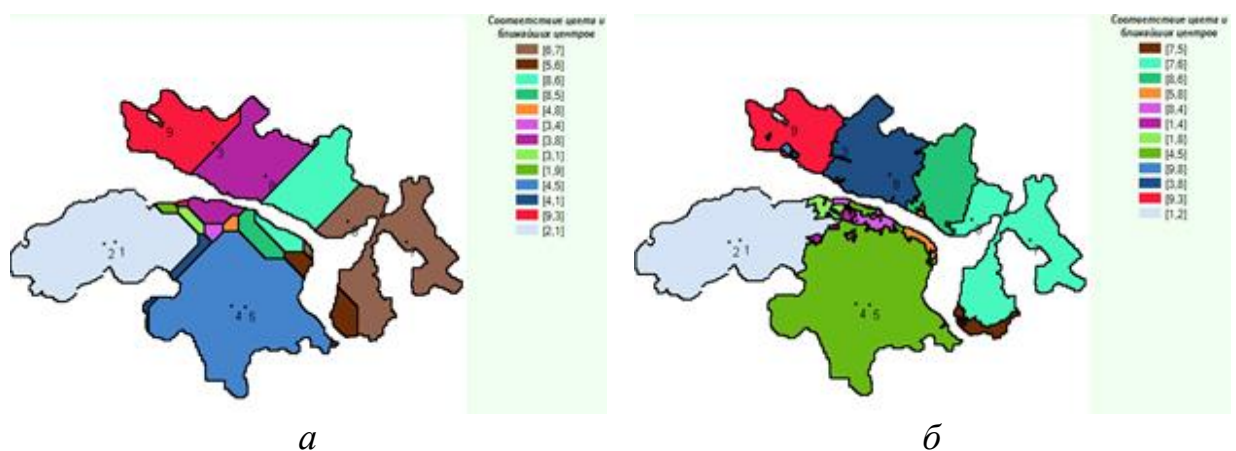


Рис. 5.7 Оптимальне розбиття 2-го порядку м. Дніпра для розміщених дев'яти центрів: а) з використанням Манхеттенської метрики; б) за відстанями між точками, розрахованими за допомогою ГІС

Оптимальне розміщення центрів і зонування території, знайдені з використанням Манхеттенська метрики, подано на рис. 5.7, а. Рис. 5.7, б відображує оптимальне розбиття 2-го порядку для тих самих центрів на основі фактичних відстаней між точками міста, розрахованими за допомогою геоінформаційної системи.

На рис. 5.8, 5.9 наведені зони відповідальності кожного конкретного підрозділу з урахуванням можливості перекривання зон двократно і трикратно відповідно.

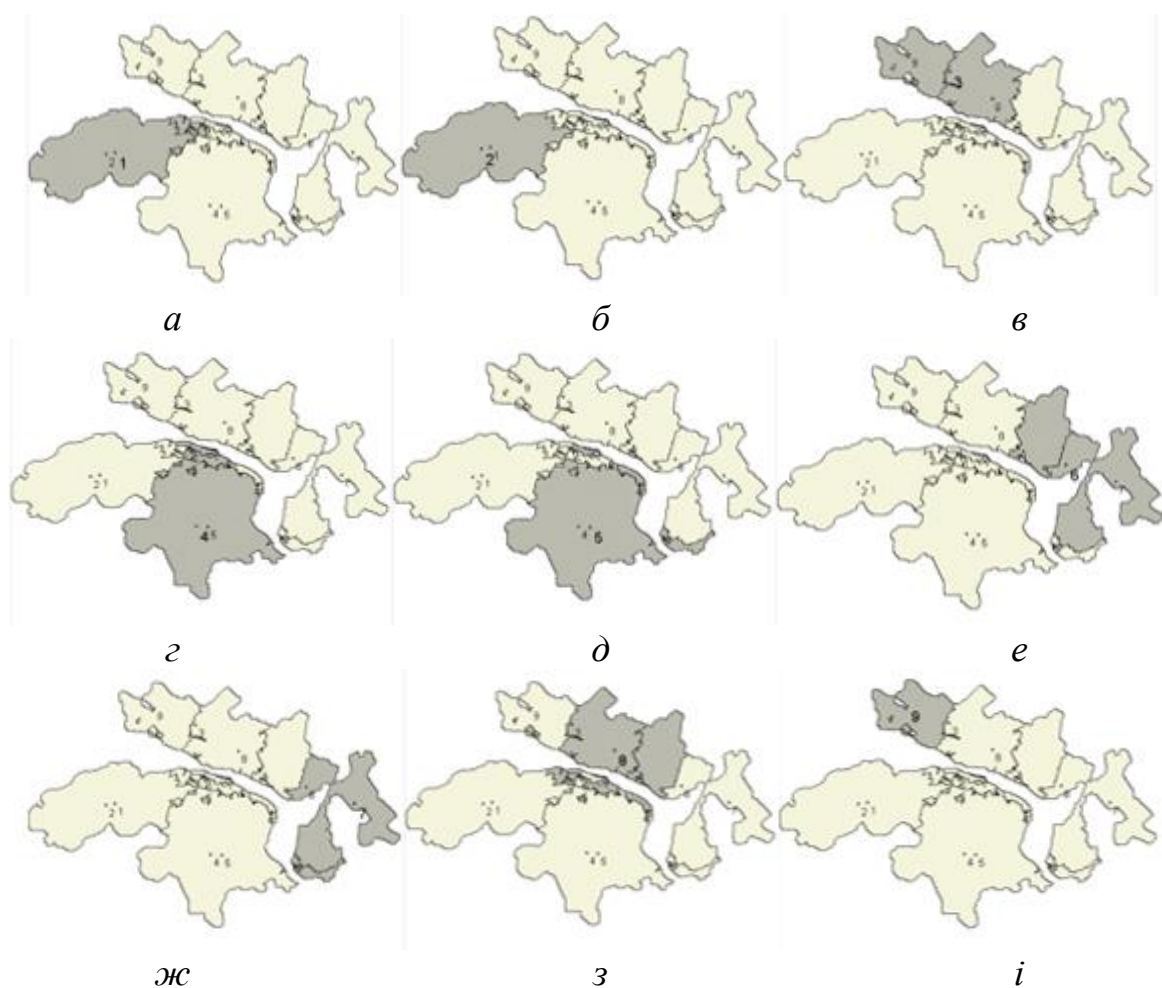


Рис. 5.8 Оптимальне розбиття 2-го порядку. Зони відповідальності сервісних центрів: а) - першого, б) - другого, і т. д. і) - дев'ятого

Слід зазначити, що знайдені у такий спосіб зони не є взаємовиключними і в більшій мірі відповідають реальності, оскільки, у порівнянні з моделями, які надають лише розбиття першого порядку і

визначають зони відповідальності як просторові монополії, із закріпленням кожного мешканця зони лише за одним центром. При цьому, зони відповідальності для деяких центрів можуть виявитися незв'язними, що є специфікою застосування розробленого математичного апарату спільно з ГІС-технологіями.

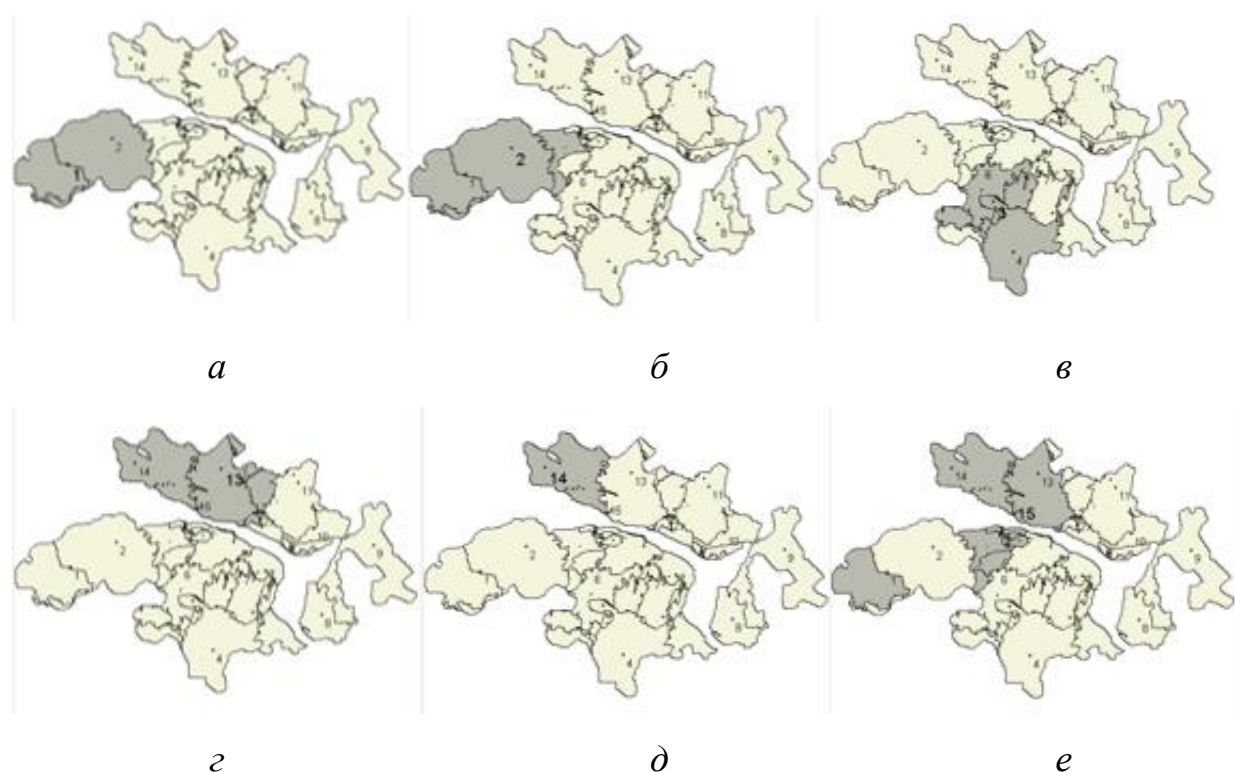


Рис. 5.9 Триплексне розбиття. Наближені зони обслуговування для вантажних відділень «Нової пошти»: а) – центру № 1, б) – центру № 2, в) – центру № 3, г) – центру № 13, д) – центру № 14, е) – центру № 15

5.3. Зонування регіону для рятувальних служб, об'єктів спостереження (оповіщення населення) за територією з багатократним її покриттям

Розглянемо задачу оптимального зонування м. Дніпра на зони оперативного реагування підрозділів МНС, враховуючи можливість двократного або трикратного перекриття зон для восьми пожежних частин

(ПЧ) міста і ставиться задача знайти зони їх відповідальності за умови, що кожен потенційний потерпілий може отримати своєчасну допомогу від однієї з двох або трьох найближчих ПЧ. Поставлена проблеми сформульована у вигляді задачі ОМРМ із заданими центрами та критерієм мінімізації $F_1(\bar{\omega}, \tau^N)$ з наступними значеннями параметрів: $w_i = 1, a_i = 0, i = \overline{1, N}$. За знайденим розбиттям розраховувалося також і значення функціоналу $F_4(\bar{\omega}, \tau^N)$, котрий дозволяє оцінити максимально можливий час очікування на допомогу (в реальності, цей час може бути значно меншим).

На рис. 5.10 подано зонування м. Дніпра на зони відповідальності МНС-частин з їх перекриттям двократно і трикратно.

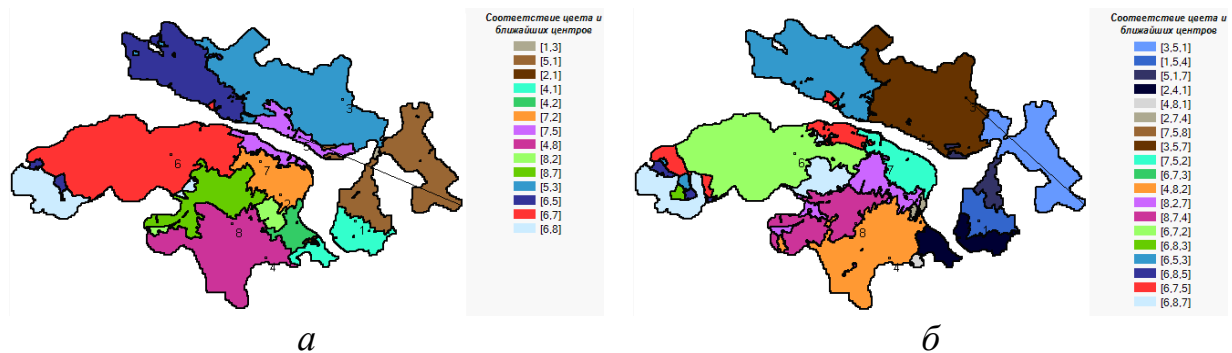
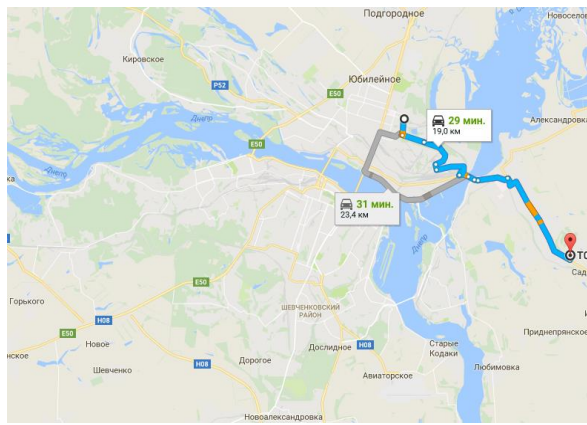


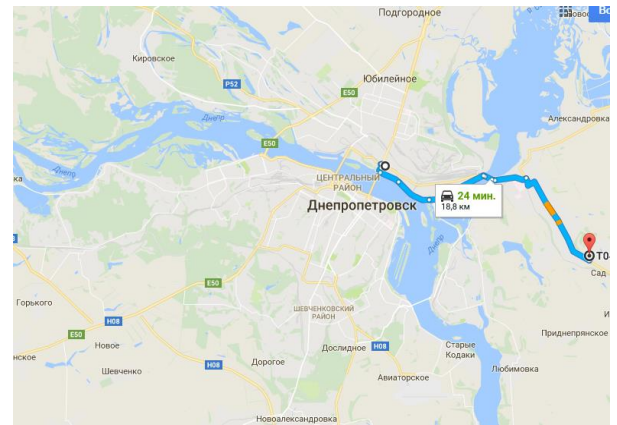
Рис. 5.10 Оптимальне розбиття k -го порядку м. Дніпра на зони реагування пожежних частин: а) $k=1$, б) $k=2$

Тонкою чорною лінією вказано мінімальний радіус покриття зон з урахуванням кратності покриття. Фактичні відстані, які відповідають цим радіусам, отримано за допомогою ГІС і наведено на рис. 5.11. На рис. 5.12 представлено зони відповідальності для кожного з восьми центрів, коли зони можуть перекриватися трикратно.

Розрахувати ресурси, необхідні підрозділу для надання того чи іншого виду допомоги своїм потенційним клієнтам, можна умовно за оцінкою кількості охопленого зоною відповідальності конкретного центру населення.



а)



б)

Рис. 5.11 Радіус покриття: а) другого порядку, б) третього порядку

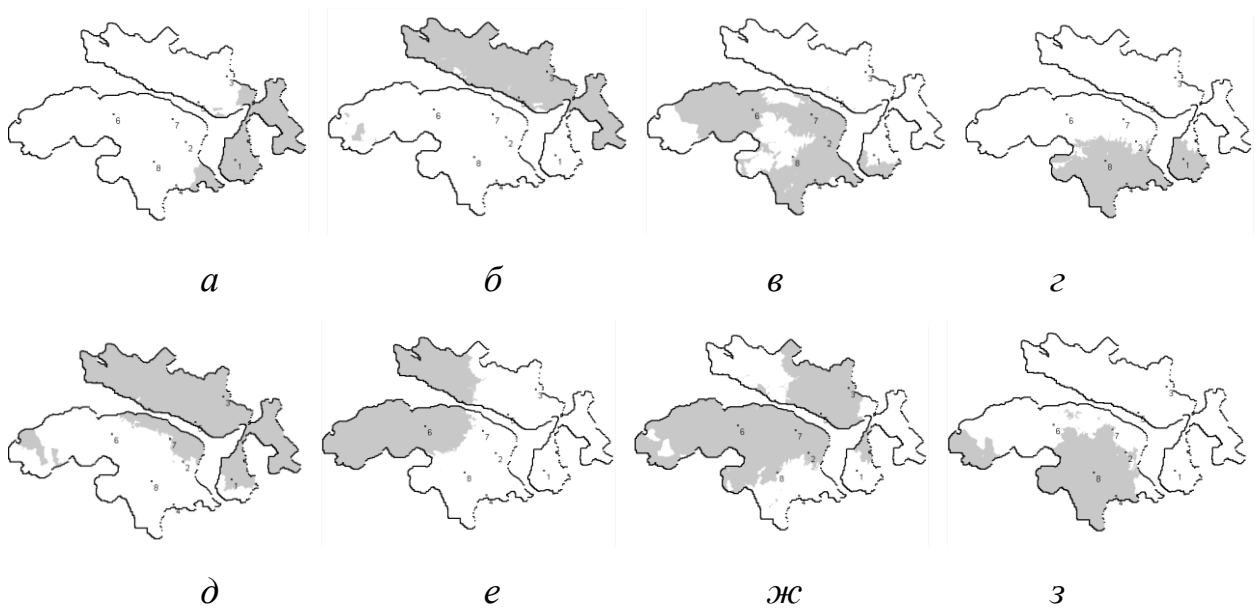


Рис. 5.12. Зони обслуговування ПЧ за умов оптимального триплексного розбиття регіону: а) – підрозділу № 1, б) – підрозділу № 2, і т. д. з) – підрозділу № 8

5.4 Інтерактивна карта зонування території для систем екстреної логістики

Інтерактивна карта мультиплексного зонування території – це інтернет-ресурс, розроблений у вигляді карти певного регіону, на якій позначаються підрозділи системи екстреної логістики і зони їх відповідальності з найближчими за відстанню мешканцями. Причому споживачі послуг розподіляються по зонах не однозначно, оскільки останні можуть

перекриватися до k -го разів. Розроблений інтернет-ресурсу дозволяє користувачеві:

- зазначати або видаляти на карті місця розташування центрів, якщо їх координати відомі заздалегідь;
- задавати порядок кратності зонування регіону;
- обчислювати найкоротші шляхи між будь-якими двома точками області за допомогою віддаленого ГІС-сервісу;
- у найкоротший термін в он-лайн режимі при кожній зміні набору центрів отримувати зонування території k -го порядку;
- зберігати налаштування та результати попередніх розрахунків з метою оптимізації наступних сесій;
- у випадку розміщення нового підрозділу існуючої системи екстреної логістики, або створення нової системи координати розташування її підрозділів (будь то первинні пункти збору населення з постраждалих територій, рятувальні служби, або центри розподілу предметів першої необхідності) можуть бути визначені оптимально (з мінімально можливою сумарною зваженою відстанню від споживачів до центрів або з найменшою відстанню від найвіддаленішого мешканця до центрів, які розміщуються) в режимі он-лайн.

Програмний продукт створений за такими етапами й за таких припущень:

- для зручності експлуатації користувачу потрібно працювати з мапою як для введення вхідних даних (про кількість підрозділів, що розташовані, і їх координати, або про центри, які розміщуються, з вказівкою про їхні потужності, витрати на відкриття тощо), так і для отримання кінцевих результатів (оптимальне розміщення центрів, зонування території з урахуванням кратності розбиття або покриття). Відтак, для побудови карт програма використовує публічний SDK;
- обчислювальний модуль використовує базу даних, схема якої представлена на рис. 5.13;

- модуль обчислень інтегровано до віддаленого ГІС сервісу; модуль працює незалежно від тої програми, яку використовує користувач для зменшення кількості розрахунків, аби результати обчислень одного користувача використовувались при зонуванні території і розміщення центрів іншим користувачем.

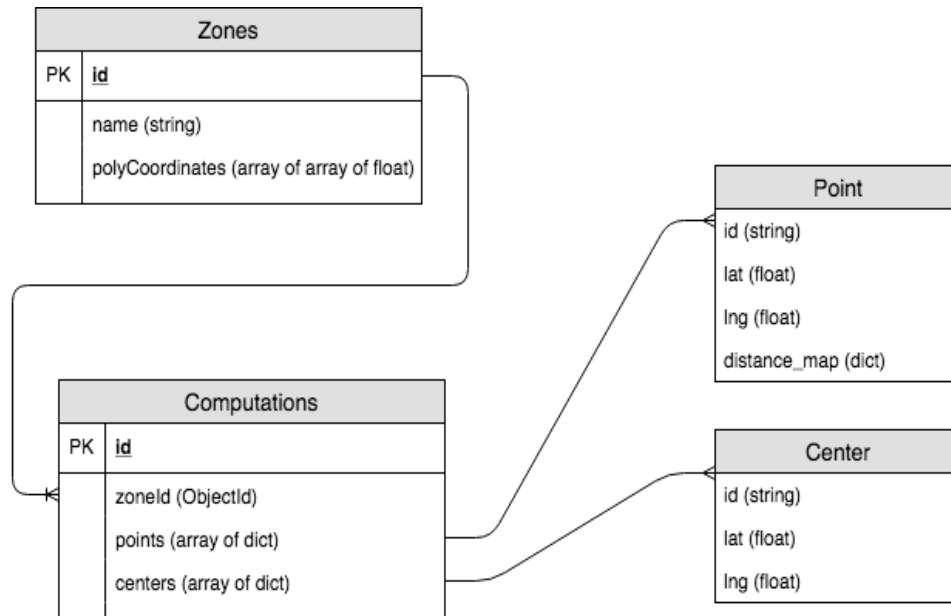


Рис. 5.13 Модель бази даних інтерактивної карти

Реалізація моделі даних здійснена в БД NoSQL, в якій вирішено проблеми доступності та масштабованості за рахунок узгодженості та атомарності даних [202]. СКБД є MongoDB, яка є документ орієнтованою, має відкритий код і не потребує описів табличних схем.

Обчислювальний модуль створений на Ruby – динамічній, рефлексивній мові програмування, яка інтерпретується як високорівнева, включає багато застосунків у вільному доступі. Модуль розроблено у вигляді веб серверу, оформлено згідно стандартів REST. Запити щодо розрахунку відстаней між центрами та точками регіону до віддаленої ГІС сервіс реалізовані у вигляді HTTP протоколу.

Інші використані програмні компоненти наступні: сервіс черги повідомлень Sidekiq, що надає можливість паралельно формувати запити до існуючих ГІС; мова програмування JavaScript для розробки інтерфейсу

користувача; тимчасове сховище даних Redis; фреймворк React. UML-діаграма програми наведена на рис. 5.14.

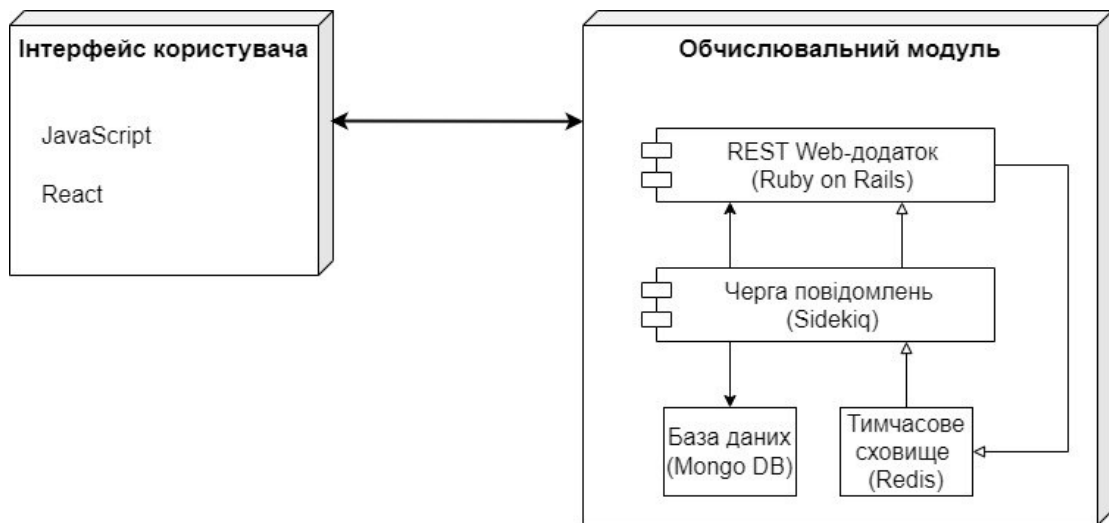


Рис. 5.14 UML діаграма стеку програми

Реалізація карти виконана за допомогою Google Distance Matrix AP, який обрано за наступних міркувань: 1) простий інтерфейс; 2) повернення фактичної відстані між точками; 3) найменші витрати на користування сервісом; 4) передача даних у вигляді пар координат.

Більш детальний опис розробленого з використанням ГІС сервісу веб-додатка наведено в роботах [205, 206]. Далі представлено деякі результати роботи інтерактивної карти територіальної сегментації міста Дніпра з оптимальним розміщенням центрів певного призначення.

З відкриттям інтерфейсу формується запит на отримання границь області обчислень і будується її полігон на карті (рис. 5.15). Полігоном є межі м. Дніпра. Далі з обраним кроком дискретизації область розбивається на елементарні частини (за замовчуванням, крок дискретизації складає $h = 0.01$ градусів). На рис. 5.16 представлено оптимальне дуплексне розбиття для заданих 15 центрів, отримане в он-лайн режимі. Якщо змінити місце розміщення одного з центрів (самого лівого), а також кратність розбиття, то зміниться і результат зонування, що можна простежити на рис. 5.17.

Створеною інтерактивною картою за потреби можна скористатися для оцінки потужностей як існуючих центрів, так і новостворюваних, коли регіон

розбивається на зони відповідальності з урахуванням не лише найближчих мешканців, але й більш віддалених, та яким прийдеться отримати послуги від певних центрів у разі, коли найближчий до них не має змогу це здійснити.

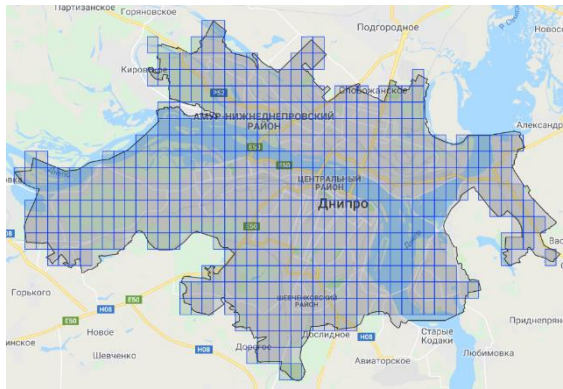


Рис. 5.15 Побудова полігону обчислень (м. Дніпро)

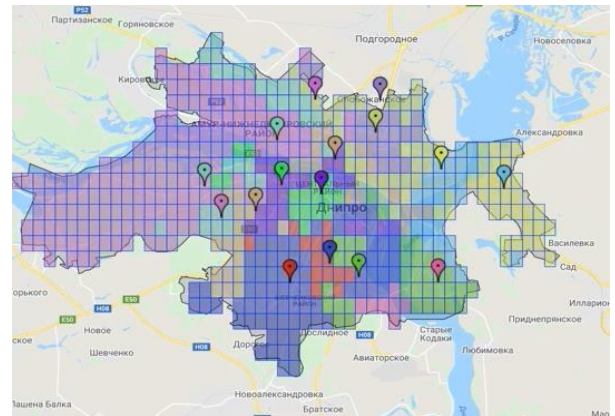


Рис. 5.16 Оптимальне дуплексне зонування для 15 центрів

Реалізовані моделі оптимізації систем екстреної логістики у вигляді мультиплексного розбиття множин дозволяють отримати перекриття зон відповідальності підрозділів. Розроблена програма дозволяє стежити за тим, як можуть розширюватися території, що закріплюються за певними підрозділами СЕЛ, із збільшенням кратності зонування.



Рис. 5.17 Зміна місця розташування одного центру й відповідне зонування 1-го порядку

Так, на рис. 5.18 відображені зони відповідальності для кожного центру, враховуючи лише їхніх найближчих клієнтів, а рис. 5.19 надає змогу оцінити, наскільки поширюється для виділеного центру зона його відповідальності за рахунок трикратного перекриття зон.

На рис. 5.20 відображено впорядковану за відстанню множину усіх центрів для певної точки міста, що також можна отримати за допомогою розробленого інтернет-ресурсу.

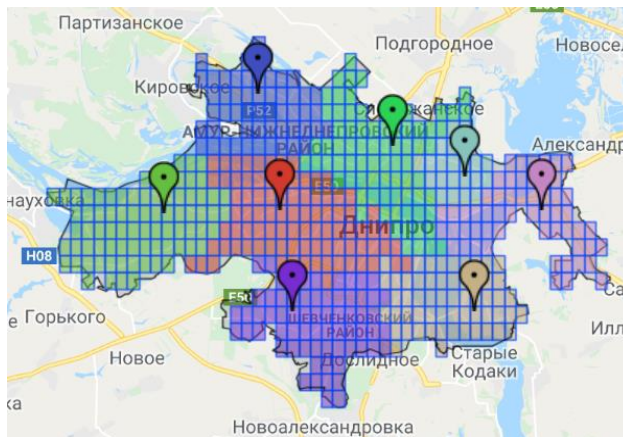


Рис. 5.18 Оптимальне зонування 1-го порядку для восьми центрів



Рис. 5.19 Зони відповідальності для зазначеного центру з трикратним перекриттям

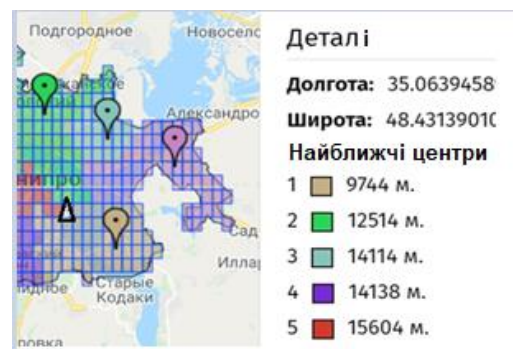


Рис. 5.20 Найближчі центри

Відтак, інтерактивна карта сприяє прийманню аргументованих рішень про відкриття нового чи закриття діючого центру будь-якого призначення за певної кількості функціонуючих сервісних об'єктів, візуалізуючи й оцінюючи

місця їх можливого розташування, обрати серед них найкращі за певними критеріями.

Вдосконалення математичних моделей задач оптимального розміщення логістичних центрів на певній території з її зонуванням за принципом територіальної близькості можна здійснити введенням демографічного, соціального, поведінкового та інших критеріїв [211], залученням евристичних алгоритмів під час розв'язання дискретно-неперервних задач розміщення-розподілення [210].

Важливим напрямком подальших досліджень є імплементація розробленого в дисертаційній роботі математичного і алгоритмічного забезпечення в систему моніторингу, попередження та ліквідації надзвичайних ситуацій та забезпечення екологічної безпеки, яку розробляють у Національному університеті цивільного захисту України [212, 213]. Удосконалення існуючих і розробка нових математичних моделей задач, що виникають під час дослідження геологічних процесів [214] (приміром, зсуву ґрунту внаслідок недотримання вимог щодо експлуатації хвостосховищ), пошуку оптимальних параметрів предметів індивідуального захисту [215], визначають інший, не менш актуальний вектор подальшої наукової діяльності.

5.5. Висновки за розділом V

В розділі описаний багатофункціональний програмний додаток, розроблений шляхом поєднання ГІС-технологій і алгоритмічного забезпечення методів розв'язання задач ОМРМ, покриття і двоетапного розміщення-розподілу. Програмний додаток забезпечує швидку наближену оцінку зон обслуговування сервісних центрів, уникаючи великих витрат, пов'язаних з проведенням детальної експертизи з боку аналітиків кожного сегменту, на якому розповсюджується дія того чи іншого центру. Сервісні зони визначаються з перекриттям за критерієм близькості споживачів до центрів, тобто передбачається можливість обслуговування користувача одним

з декількох найближчих центрів. Можна також візуалізувати і просторові монополії, реалізуючи моделі неперервних задач ОРМ як окремі випадки розроблених в дисертаційній роботі моделей задач мультиплексного розбиття множин.

Програмний додаток включає і реалізацію алгоритмів розв’язання багатоетапних задач розміщення-розподілення, що дозволяє використовувати її для вирішення цілого ряду практичних проблем, пов’язаних із задачами стратегічного планування у виробничій, соціальній, економічній сферах діяльності, зокрема:

- при створенні територіально-розподілених компаній з багаторівневою структурою, що виконують заготівлю сировини, її комплексне використання, випуск продукції і доставку кінцевим споживачам;
- для визначення необхідної кількості сил і засобів, розробки стратегії і тактики надання допомоги населенню регіону на випадок надзвичайної ситуації;
- для оперативного реагування на надзвичайні ситуації, розподілу ресурсів підпорядкованих підрозділів систем екстреної логістики;
- для завчасного планування і розподілу контролю за станом екологічної безпеки регіону із метою запобігання або зниження негативного впливу наслідків потенційного лиха на населення, територію і довкілля.

Створена інтерактивна карта територіального зонування для м. Дніпра з цільовою аудиторією осіб, котрі відповідають за відкриття або закриття нових об’єктів будь-якого призначення.

Виклад основних положень цього розділу можна знайти у роботах автора [95, 142, 193, 201, 205 – 211].

РОЗДІЛ VI

АНАЛІЗ І ОПТИМІЗАЦІЯ ВИБОРУ СУКУПНОСТІ ЗАХОДІВ ЩОДО ПІДВИЩЕННЯ БЕЗПЕКИ ЛОГІСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

В даному розділі розроблено методики оцінювання ризику інцидентів під час пасажирських перевезень з використанням методу FRAM (*Functional Resonance Analysis Method*), побудовано математичні моделі оптимального вибору комплексу завчасних заходів щодо зниження професійного ризику виникнення небезпеки на виробничих підприємствах і раціонального розподілу ресурсів з урахуванням їх розкладу на певний період. Розглянуто деякі питання, пов'язані із розробкою систем спостереження за станом водія при керуванні транспортним засобом, систем контролю доступу на небезпечні виробництва на основі нейромережових методів розпізнавання обличч. Надано деякі рекомендації щодо підвищення безпеки в системах екстреної логістики, які розроблено в межах дисертаційного дослідження.

6.1. Оцінювання ризику виникнення інцидентів під час транспортного процесу з використанням методу FRAM

6.1.1. Розробка методики оцінювання факторів, що впливають на безпеку транспортного процесу пасажирських перевезень

Пасажирські автомобільні перевезення (ПАП) задовольняють потреби населення в переміщенні у просторі, від пункту відправлення до місця призначення. Вони займають великий сегмент в транспортній інфраструктурі великих міст, відіграють вагомую роль при перевезенні пасажирів в регіональному і міжнародному сполученнях. Через збільшення попиту на ПАП, зокрема, під час надзвичайних ситуацій, підвищується ризик виникнення дорожньо-транспортних пригод (ДТП). Далі запропоновано

модель транспортного процесу, методику оцінювання ризиків виникнення небажаних подій у процесі пасажирських автомобільних перевезень, запропоновані заходи щодо підвищення їх безпеки.

Поняття **ризик**у для транспортного процесу будемо трактувати як кількісну міру потенційної небезпеки або небажаних наслідків, яка характеризує ймовірну можливість потрапляння в дорожньо-транспортну пригоду, внаслідок чого – порушення графіку руху під час перевезення пасажирів. Оцінюючи ризик, будемо дотримуватися концепції неминучості, але зведення до мінімуму, небезпечних подій на транспорті. Підставою такого положення є аналіз і врахування небезпек у процесі проектування технічних і логістичних систем, підвищена увага і контроль за відповідальним дотриманням законодавства в галузі безпеки, фінансування заходів щодо її забезпечення тощо.

Для управління ризиками небезпеки при здійсненні ПАП важливим є детальне дослідження впливу різних причинно-наслідкових зав'язків транспортного процесу на кожному його етапі, порівняння небезпек різного походження та механізмів їхніх дій, ранжування потенційних джерел небезпек за їхнім внеском в інтегральні показники ризику. Скористаємося методом FRAM [216].

Будемо розглядати транспортний процес як сукупність функцій, пов'язаних між собою певним чином, для кожної з яких визначаються шість найбільш впливових аспектів (характеристик, параметрів): І – вихідні дані; Т – час; С – контроль; R – ресурс; Р – передумови; О – вихідні дані. На схемі процесу функція відображається у вигляді так званого функціонального шестикутника (рис. 6.1). Всі функції розглядаються у взаємодії між собою так, що компоненти або результат однієї функції можуть бути вхідними параметрами, передумовою, контрольним аспектом іншої функції, або ж її базовим елементом (табл. 6.1). Застосування методу FRAM для аналізу транспортного процесу ПАП і оцінювання ризику виникнення небажаних інцидентів будемо проводити у чотири кроки.

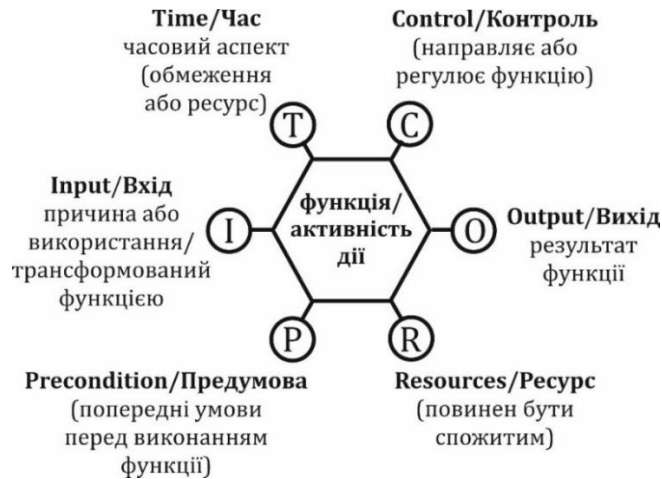


Рис. 6.1. Функціональний шестикутник методу FRAM

Таблиця 6.1

Характеристика функціональних елементів методу FRAM

Позначення елемента	Найменування	Опис елемента
I (Input)	Вхідні дані (вхідна інформація)	дані, що використовуються в процесі виконання функції; можуть бути результатом попередніх функцій; обумовлюють виконання функції
O (Output)	Вихід	відображає результат або технічний стан складових системи, або досягнення певної мети; може бути вхідним елементом для іншої функції
T (Time)	Час	термін функціонування елементів системи, обробки даних, процесів підготовки чи діагностування
C (Control)	Контроль	методи і процедури моніторингу та контролю за технічними характеристиками процесу або системи і виконанням функції в цілому
P (Preconditions)	Передумови	Перелік умов, за яких функція може бути виконана
R (Resources)	Ресурси	Перелік ресурсів і засобів, потрібних для виконання функції або функціонування елементів системи ПА

Крок перший. Ідентифікація основних етапів транспортного процесу та їх опис з огляду шести вказаних вище аспектів. Для кожної складової транспортного процесу ПАП з'ясовуємо, що є вхідним елементом, який запускає функцію, передумовою для її роботи та необхідними ресурсами для її виконання.

Крок 2. Визначення потенційної мінливості функцій. Характеристики мінливості функцій визначають за вихідними результатами (продуктивністю), які можуть бути змінними в часі та точності виконання.

Крок 3. Визначення функціонального резонансу. На даному етапі вирішується задача з оцінки ризику відмови кожної з функцій (небажаного результату) і впливу такої мінливості на інші складові процесу.

Крок 4. Управління змінами. Виявлення найбільш впливових на транспортний процес ПАП факторів, пошук ефективних управлінських рішень щодо зменшення ризику виникнення небезпечних подій.

6.1.2 Моделювання взаємозв'язків між основними етапами процесу пасажирських перевезень на основі методу FRAM

Представимо транспортний процес ПАП у вигляді п'яти основних функцій: підготовка, подача ПА, посадка пасажирів, транспортування та висадка пасажирів в пункті призначення. Вихідні дані кожної функції є вхідними для інших. Наприклад, підготовка завершується вибором ТЗ відповідної пасажиромісткості, водія певної категорії, визначенням особливостей маршруту, з урахуванням кліматичних умов, розкладу руху, та інше. А, отже, вихід функції Підготовка є вхідними даними для наступних функцій: подача ПА, посадка, транспортування у відповідних аспектах (рис. 6.2). Вочевидь, кожну з виділених основних функцій можна у свою чергу деталізувати, тобто представити у вигляді сукупності функцій, що складають основну і визначають певну її складову (передумови, ресурси, контроль тощо). Так, на рис. 6.2 відображений склад функції Підготовка, який включає: аналіз умов навколишнього середовища, аналіз експлуатаційних властивостей пасажирського автотранспорту, розробка маршруту, складання розкладу руху, перед рейсовий технічний огляд ПА, медичний огляд водія, перед рейсове оформлення транспортної документації. Для кожної з цих функцій наявні свої вхідні дані, передумови, кожна з них вимагає своїх ресурси, час, контролюючі

заходи. Вплив інших чинників на складові транспортного процесу можна простежити в табл. 6.2.

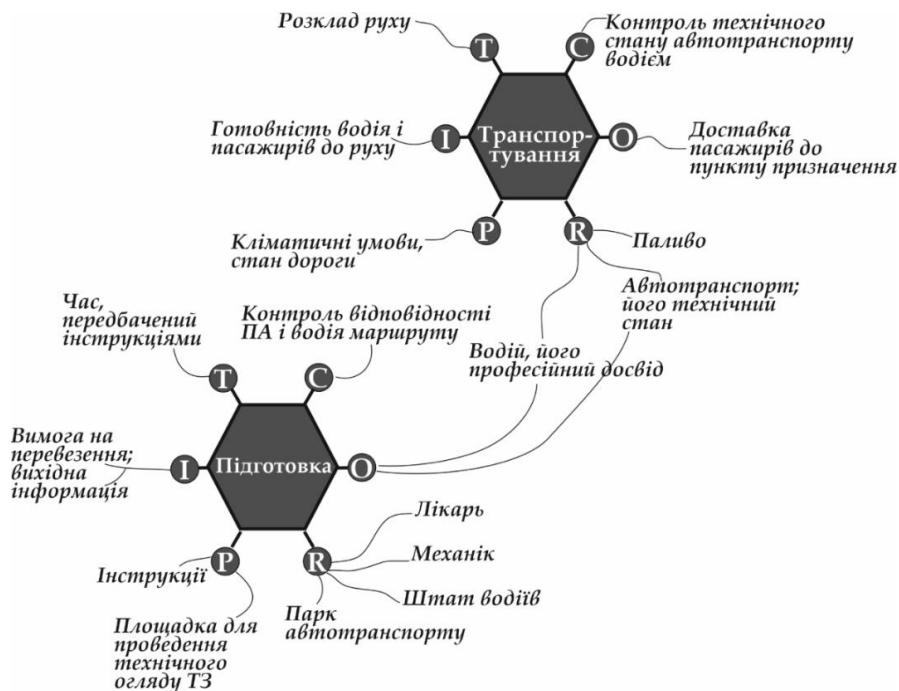


Рис. 6.2 Параметри функцій Підготовка і Транспортування

Оцінювання ризику небажаної ситуації від сумісної дії декількох чинників під час перевезення пасажирів будемо проводити на основі феноменологічної моделі, яка не має на меті встановлення будь-яких жорстких законів взаємодії між факторами і подіями, а лише узагальнює сукупний їх вплив на досліджуваний процес.

Вочевидь, кожна з функцій опису процес перевезення пасажирів відображує взаємодією між людськими, транспортними та організаційними факторами і може бути оцінена за певними критеріями, які, в свою чергу, обумовлюють безпеку ПАП.

Взаємозв'язки між компонентами процесу ПАП відповідно FRAM проілюстровано на рис. 6.3.

Ставлячи за мету виявлення слабких місць в схемі ПАП, серед найбільш впливових на транспортний процес чинників будемо розглядати ті, значення яких регламентовано відповідними нормативами, а саме: професійний досвід водія, регламентовано [217] – не менш 5 років; час роботи (керування) ПА водієм на маршруті, регламентовано [218] – не більш 4,5 годин; строк

експлуатації ПА, регламентовано [219] – 10 років; дозволена швидкість руху ПА регламентовано [217] в умовах міста – 50 км/год, на автотранспортних магістралях – 90 км/год; навантаження (стрес) регламентовано [220].

Таблиця 6.2. – Опис функцій, які характеризують транспортний процес ПАП

Елемент	Функції				
	1 Підготовка	2 подача	3 посадка	4 Транспортування	5 Висадка
1 Input	Експлуатаційні властивості, кліматичні умови перевезення; кількість пасажирів; маршрут, розклад руху	Тип ПА, розклад руху; пасажиромісткість ПА	Розміщення ПА в пункті відправлення	ПА, заповнений у відповідності до пасажиромісткості, наявна транспортна документація	Доставка пасажирів у пункт призначення у відповідності до розкладу руху
2 Time	Нормативний час, визначений інструкцією автотранспортного підприємства	Відповідно до розкладу паспорту маршруту	Відповідно до розкладу паспорту маршруту	Відповідно до розкладу паспорту маршруту	Відповідно до розкладу паспорту маршруту
3 Preconditions	Наявність в парку автомобілів, технічно придатних для перевезення відповідної кількості пасажирів; інструкція з професійного допуску водія до керування ПА; посадові інструкції лікаря і механіка;	Місце для посадки пасажирів задовольняє можливість маневрування ПА; розміри майданчика для посадки пасажирів	Пасажиромісткість ПА відповідає кількості пасажирів, які перевозяться; об'єм багажного відділення відповідає безпечному розміщенню багажу у відповідному обсязі	Сприятливі кліматичні умови; розвинена (сучасна, сприятлива) транспортна інфраструктура; якісне пальне; дотримання графіку руху; адекватні пасажирів	Місце для висадки пасажирів повинно задовольняти можливості здійснювати маневрування ПА
4 Resources	Парк автомобілів; штат водіїв; менеджер з організації ПАП; механік з випуску ПА на лінію; лікар, який здійснює медичний передрейсовий огляд водія ПА.	Компетенції водія	Обладнана площадка для посадки пасажирів в салон ПА	Професійний досвід, стресостійкість, відповідний фізичний і психофізіологічний стан водія	Компетенції водія, розміри майданчика для висадки пасажирів
5 Control	Перевірка транспортної документації, технічного стану ПА, стану здоров'я водія	Час простою, транспортна документація	Розміщення пасажирів і багажу в салоні ПА; контроль фізичного і психологічного стану пасажирів	Швидкість руху, експлуатаційні показники, графік руху	Висадки пасажирів в пункті призначення
Output	Тип, марка ПА; водій певної категорії; розклад руху	Маневрування ПА і очікування посадки пасажирів в пункті відправлення.	Розміщення пасажирів в салоні ПА, наявна транспортна документація	Доставка пасажирів у пункт призначення	Маневрування ПА і очікування висадки пасажирів в пункті відправлення.

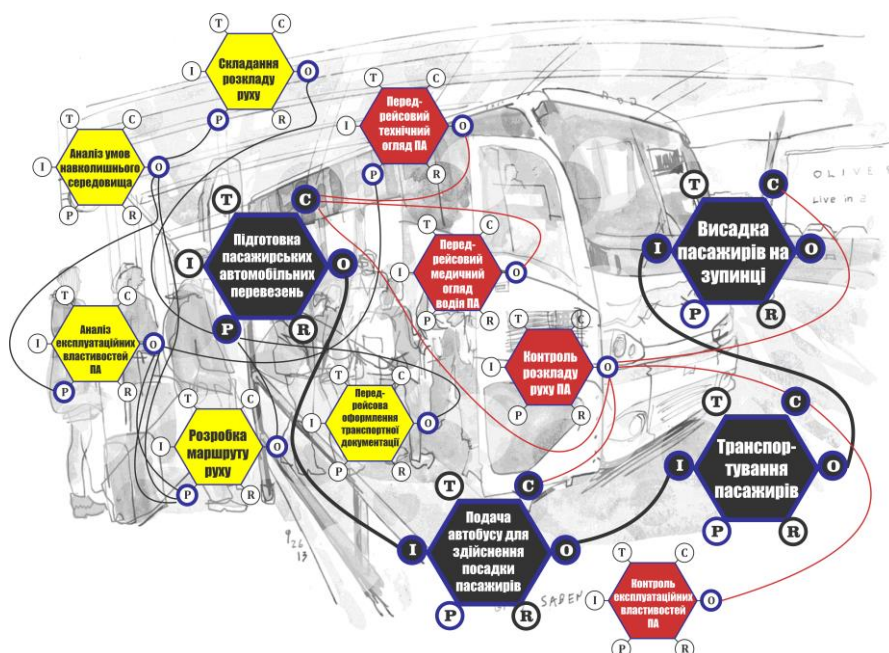


Рис. 6.3. Взаємозв'язки між компонентами процесу ПАП відповідно FRAM

Зміни значень вказаних критеріїв (далі параметрів або показників), звісно, впливатимуть на мінливість функцій транспортного процесу в цілому. Наприклад, у порівнянні з досвідченими водіями у недосвідченого водія, який здійснює керування ПА, простої на зупиночних пунктах можуть бути тривалішими, а середня швидкість руху ПА повільнішою.

Дослідимо можливість невиконання перевезення пасажирів на належному рівні (наприклад, доставки пасажирів до місця призначення не в строк), за рахунок відхилення зазначених факторів від нормативних вимог.

Аби оцінити потенційний одночасний вплив низки факторів ризику на процес ПАП, змодельємо два сценарії: «гарний», тобто базовий, з найбільш ймовірними значеннями вхідних змінних, і «поганий», з підбором показників, притаманних небажаному збігу причин.

Сценарій 1. Транспортування пасажирів здійснюється без порушень правил організації і здійснення транспортного процесу ПАП: професійний досвід працівників, які здійснюють організацію, контроль і безпосередньо керування ПА, відповідають нормативам, які регламентовані посадовими інструкціями АП і чинним законодавством; експлуатаційний строк ПА не перевищує нормативу експлуатації відповідного типу ТЗ, який регламентовано чинним законодавством; транспортний процес ПАП здійснюється без порушення ПДР, які регламентують допустиму швидкість.

Сценарій 2. Транспортування пасажирів здійснюється з порушенням правил організації і здійснення транспортного процесу ПАП: професійний досвід працівників, які здійснюють організацію, контроль і безпосередньо керування ПА, менший за регламентований посадовими інструкціями АП і чинним законодавством; експлуатаційний строк ПА перевищує норматив експлуатації відповідного типу ТЗ, який регламентовано чинним законодавством; транспортний процес ПАП здійснюється з порушенням ПДР, які регламентують допустиму швидкість.

Значення виділених показників для цих сценаріїв наведені в табл. 6.3.

Таблиця 6.3. Значення показників транспортного процесу в змодельованих сценаріях

Номер критерія	Показники\ Сценарії	Сценарій 1	Сценарій 2
1	Професійний досвід водія	12	2
2	Професійний досвід лікаря	5	7
3	Професійний досвід механіка	10	3
4	Строк експлуатації автотранспорту	8	15
5	Час водія за кермом	4,5	3,5
6	Швидкість руху в межах міста	60	65
7	Швидкість руху на автостраді	90	110

Кожному параметру, що розглядається, поставимо у відповідність величину, яка приймає значення на відрізку $[0, 1]$ так, що чим більшим є її значення, тим сприйнятливіші умови транспортного процесу за рахунок величини даного параметру. Тим самим виправдовується використання слова «критерій» для зазначених показників. Кожен критерій опишемо математично у вигляді певної функції. Так, значення критерію «Професійний досвід водія» представимо за допомогою формули

$$K_1(x) = 0.42x^{0.5} \cdot e^{-1.6(x-5)/25},$$

де x – фактичний досвід водія. Графік функції представлений на рис. 6.4, а її вибір здійснюється за наступних міркувань: найкращий досвід за нормативами від 5 років і вище, тому найбільші значення критерію (близькі до 1, але не більші за неї) мають відповідати саме цим значенням: K_{1max} . Вочевидь, ми припускаємо, що навіть за найкращих обставин, існує можливість непередбачуваних обставин, тобто є ризик небажаної ситуації. Нульове значення критерію вказує на відсутність досвіду у водія. А його накопичення понад 20 років може призвести до накопичення втоми, професійного вигорання, появи зміни в фізіологічному стані тощо, а це означає поступове зниження значення критерію.

Для показників «Професійний досвід лікаря» і «Професійний досвід механіка» критерії описуються однаково:

$$K_{2,3}(x) = 1 - 0.7/(x + 0.7),$$

де x – фактичний досвід працівника. Функцію підібрано за тих припущень, що чим досвідченішим є працівник (досвід, вищий за 3 роки), тим вищим є значення критерію (рис. 6.5).

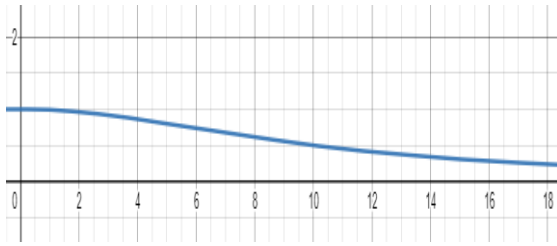


Рис. 6.4 Графік функції $K_1(x)$

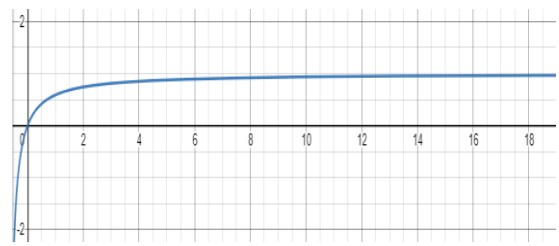


Рис. 6.5 Графік функції $K_2(x)$ ($K_3(x)$)

Для показників «Час роботи за кермом», «Строк експлуатації автотранспорту», «Швидкість руху в межах міста», «Швидкість руху по автостраді» введені відповідно критерії, які відображують те, що чим більшим є відхилення від нормативів, тим гіршим є значення критерію:

$$K_4(x) = \frac{100}{100+x^2}, \quad K_5(x) = \frac{394}{400+(x+0.5)^2},$$

$$K_6(x) = \frac{296}{300+(x-50)^2}, \quad K_7(x) = \frac{296}{300+(x-90)^2}.$$

де x – фактичні значення відповідних показників. Графіки функцій наведені на рис. 6.6 – 6.9.

Будемо також враховувати такий показник, як Навантаження водія (стрес), описуючи його деякою величиною $K_8(x)$, яка коливається від 0 до 1 і відображає ступінь ретельності контролю за виконанням завдання водієм (контроль за станом техніки, рухом тощо). Вважатимемо, що чим ретельніше здійснюється інспектування транспортного процесу (чим більше значення K_8), тим кращі умови перевезення пасажирів. Якщо функція контролю – прерогатива лише водія (як передбачено в сценаріях 1 і 2), то якість її виконання залежить, у тому числі, від зовнішніх умов, психофізіологічного стану водія (почуття внутрішнього комфорту/дискомфорту, наявність втоми, швидкість реакції, культура та навички водіння, емоційне навантаження).

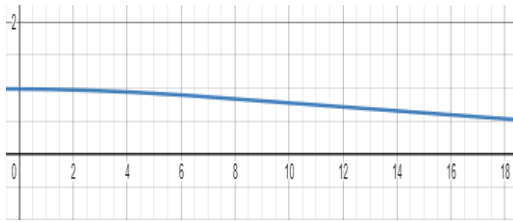


Рис. 6.6 Графік функції $K_4(x)$



Рис. 6.7 Графік функції $K_5(x)$

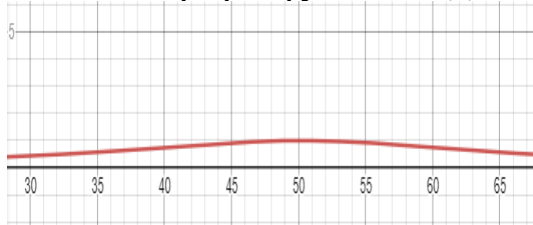


Рис. 6.8 Графік функції $K_6(x)$

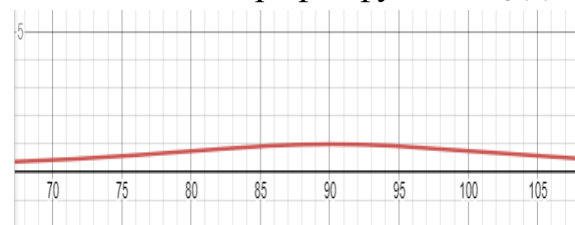


Рис. 6.9 Графік функції $K_7(x)$

В табл. 6.4 наведені значення критеріїв $K_i(x)$, $i = \overline{1,8}$, що відповідають сценаріям 1 і 2 (див. табл. 6.3).

Таблиця 6.4. Значення критеріїв для сценаріїв 1 і 2

Номер критерія	Показники\ Сценарії	Сценарій 1	Сценарій 2
1	Професійний досвід водія	0,9296	0,7197
2	Професійний досвід лікаря	0,8772	0,9091
3	Професійний досвід механіка	0,9346	0,8108
4	Строк експлуатації автотранспорту	0,8343	0,6154
5	Час водія за кермом	0,8316	0,8909
6	Швидкість руху в межах міста	0,7400	0,5638
7	Швидкість руху на автостраді	0,9867	0,4229
8	Навантаження (стрес)	0,9000	0,6500

Позначимо через λ_{jk}^i величину, яка є індикатором того, що i -й критерій впливає певним чином на k -ту характеристику (часі, ресурсах, контролі тощо) j -ї базової функції FRAM-діаграми транспортного процесу, тобто

$$\lambda_{jk}^i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i\text{-й критерій визначає } k\text{-й фактор } j\text{-ї функції} \\ 0 & \text{у протилежному випадку, } j = \overline{1,5}, i = \overline{1,8}, k = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Сумісний вплив параметрів на кожну з п'яти функцій будемо обчислювати за формулою

$$F_j = \sum_{k=1}^5 \omega_{jk} H_{jk}, \quad H_{jk} = \frac{\sum_{i=1}^8 K_i \lambda_{jk}^i}{\sum_{i=1}^8 \lambda_{jk}^i}, \quad j = \overline{1,5}, \quad (6.1)$$

де F_j – вихід j -ї функції; H_{jk} – кількісна величина, що визначає вплив k -ї характеристики на j -у базову функцію, ω_{jk} – ваговий коефіцієнт впливовості

фактору у відповідній функції, заздалегідь розрахованих на основі аналізу взаємозв'язків у схемі транспортного процесу.

Представлені функції $K_i(x)$, $i = \overline{1,8}$ можна інтерпретувати як надійність виконання перевезення пасажирів в строк за рахунок заданих значень параметрів. Всі вони обрані так, що їх значення зменшуються зі збільшенням відхилення параметрів процесу від нормативів. Тому величини F_j , $j = \overline{1,5}$, в свою чергу, можна розглядати як надійність відповідної базової функції, а значення $(1-F_j)$ – як ризик її небажаного результату. І, оскільки функції виконуються послідовно, то вважатимемо, що надійність транспортного процесу може бути виражена добутком F_j , $j = \overline{1,5}$, тобто

$$S = \prod_{j=1}^5 F_j, \quad (6.2)$$

а ризик виникнення небажаної ситуації під час перевезення пасажирів за умов сумісного впливу параметрів, що розглядаються, будемо обчислювати за формулою

$$R = 1 - S. \quad (6.3)$$

Визначення вагових коефіцієнтів ω_{jk} , $j = \overline{1,5}$, $k = \overline{1,5}$, здійснюється за таким алгоритмом. Для кожної k -ї характеристики j -ї базової функції (далі (j,k) -фактор) формується матриця A^{jk} розмірності (5×5) , елементи якої дорівнюють

$$a_{ps}^{jk} = \begin{cases} 1, & (j,k)\text{-фактор впливає на } s\text{-й фактор } p\text{-ї функції} \\ 0 & \text{в протилежному випадку,} \end{cases} \quad p = \overline{1,5}, s = \overline{j,5}.$$

$$\text{Тоді } \omega_{jk} = \frac{\sum_{s=j}^5 \sum_{p=1}^5 a_{ps}^{jk}}{\sum_{k=1}^5 \sum_{s=j}^5 \sum_{p=1}^5 a_{ps}^{jk}}, \quad j = \overline{1,5}, k = \overline{1,5}.$$

Результати кількісного оцінювання базових функцій транспортного процесу ПАП для ідеальних умов, а також сценаріїв 1 і 2 наведені в табл. 6.5.

Таблиця 6.5

Мінливість базових функцій транспортного процесу ПАП, викликана зміною їх характеристик

Номер функції, j	Характеристика, k	Ваговий коефіцієнт ω_{jk}	Кількісна оцінка параметрів за умов			Кількісна оцінка виконання базової функції за умов		
			Найкращих	Сценарію 1	Сценарію 2	Найкращих	Сценарію 1	Сценарію 2
Підготовка ПАП								
1	input	0,07	1,00	1,00	1,00	0,0697	0,0697	0,0697
	time	0,13	1,00	0,93	0,81	0,1310	0,1224	0,1062
	precond	0,07	0,99	0,99	0,99	0,0690	0,0690	0,0690
	resource	0,26	1,00	0,93	0,81	0,2616	0,2445	0,2121
	control	0,47	1,00	0,88	0,91	0,4679	0,4105	0,4254
	output	$F_1 =$				0,9993	0,9161	0,8825
Подача ПА для здійснення посадки пасажирів								
2	input	0,15	1,00	0,93	0,81	0,1507	0,1408	0,1222
	time	0,15	1,00	0,93	0,72	0,1507	0,1401	0,1085
	precond	0,08	0,99	0,99	0,99	0,0794	0,0794	0,0794
	resource	0,08	1,00	0,93	0,72	0,0802	0,0745	0,0577
	control	0,54	1,00	0,90	0,65	0,5382	0,4844	0,3498
	output	$F_2 =$				0,9992	0,9193	0,7176
Посадка пасажирів								
3	input	0,07	1,00	0,83	0,62	0,0735	0,0613	0,0452
	time	0,08	1,00	1,00	1,00	0,0771	0,0771	0,0771
	precond	0,10	0,99	0,99	0,99	0,1017	0,1017	0,1017
	resource	0,38	1,00	0,93	0,72	0,3810	0,3541	0,2742
	control	0,37	1,00	0,90	0,65	0,3656	0,3291	0,2377
	output	$F_3 =$				0,9990	0,9234	0,7359
Транспортування пасажирів								
4	input	0,19	1,00	0,83	0,62	0,1933	0,1613	0,1190
	time	0,09	1,00	0,99	0,42	0,0947	0,0935	0,0401
	precond	0,13	0,99	0,99	0,99	0,1305	0,1305	0,1305
	resource	0,19	1,00	0,74	0,56	0,1933	0,1431	0,1090
	control	0,39	1,00	0,90	0,65	0,3867	0,3480	0,2514
	output	$F_4 =$				0,9987	0,8764	0,6500
Висадка пасажирів на зупинці								
5	input	0,31	1,00	0,83	0,89	0,3143	0,2614	0,2800
	time	0,15	1,00	0,74	0,56	0,1535	0,1136	0,0866
	precond	0,15	0,99	0,83	0,62	0,1520	0,1281	0,0945
	resource	0,23	1,00	0,93	0,72	0,2251	0,2092	0,1620
	control	0,15	1,00	0,90	0,65	0,1535	0,1382	0,0998
	output	$F_5 =$				0,9985	0,8505	0,7228

Кількісні оцінки всього процесу перевезення пасажирів для найкращих умов, та параметрів, передбачених сценаріями 1 і 2, відповідно дорівнюють $S_{best} = 0,995$, $S_{sc1} = 0,58$ і $S_{sc2} = 0,219$; $R_{best} = 1 - S_{best} = 0,005$, $R_{sc1} = 1 - S_{sc1} = 0,42$ і $R_{sc2} = 1 - S_{sc2} = 0,781$. А отже, навіть за ідеальних умов є ризик небажаного результату. Зріст відхилення показників процесу від нормативних значень збільшує цей ризик в рази.

Аналізуючи дані, наведені в табл. 6.2 та 6.5, можна виявити найбільш впливові характеристики кожної з базових функцій, що забезпечують якісне і

своєчасне її завершення. Зокрема для функції підготовки – важливими є вхідні дані про зовнішні умови, розробка відповідного маршруту та графіку руху і ресурси, а для функції транспортування – якісна інфраструктура, технічні характеристики автотранспорту та фізичний і психологічний стан водія. Та майже на всіх етапах процесу перевезення пасажирів найважливішою складовою є контроль за виконанням функції. І це безсумнівно, оскільки настання небажаної події тісно пов'язане як з недосконалим інспектуванням технічного стану автотранспорту на етапі підготовки, так і з людською помилкою, викликаною або психофізіологічним станом, або недостатнім досвідом водіння, перевищення власних можливостей водія, прояв втоми. Отже, функціональний резонанс в транспортному процесі може бути викликаний недосконалістю або відсутністю належного контролю за діяльністю усіх учасників процесу, від операторів до водія. В сценарії 2 простежується характер «людської помилки» – не одноразовий акт, а системна невідповідність, викликана організаційною культурою на підприємстві: відсутністю певних ресурсів, передумов і здійсненням контролю над рухом лише водієм. Тому для зменшення ризику настання небажаної події під час транспортного процесу необхідно посилити саме вказані елементи функцій.

На етапі «Управління змінами» пропонується удосконалений варіант транспортного процесу, який передбачає дистанційний контроль за технічним станом автотранспорту та водієм, починаючи з етапу підготовки автомобіля і закінчуючи висадкою пасажирів в пункті призначення. На рис. 6.10 наведено взаємозв'язки між складовими удосконаленого транспортного процесу перевезення пасажирів із впровадженими елементами контролю за здоров'ям і психофізіологічним станом суб'єктів транспортного процесу, а також транспортного засобу.

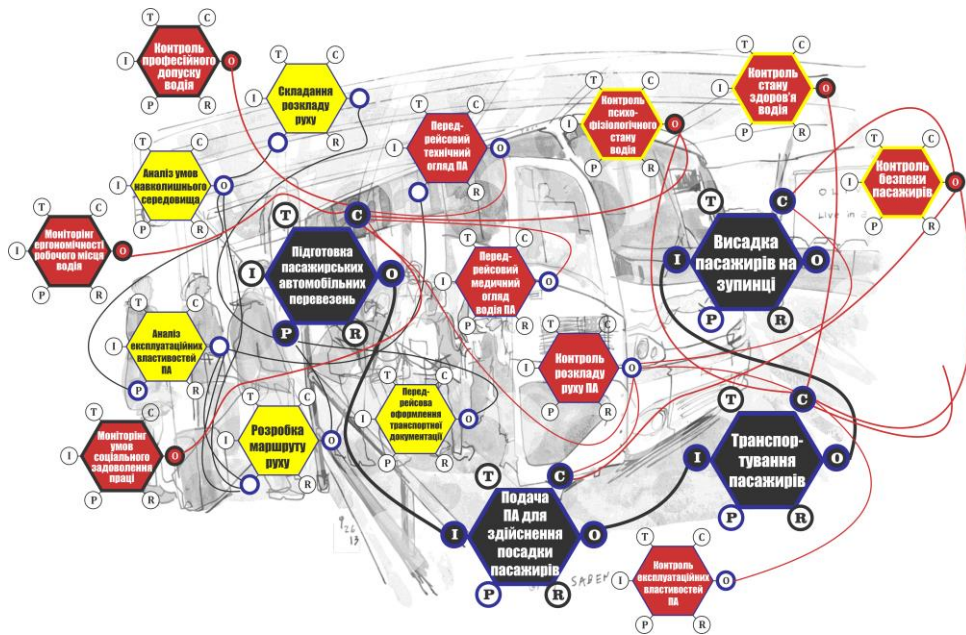


Рис. 6.10. Взаємозв'язки удосконаленого транспортного процесу ПАП

Відтак, до транспортного процесу перевезення пасажирів введено чотири нових контролюючих заходи: контроль професійного допуску водія; контроль безпеки пасажирів; контроль психофізіологічного стану водія; контроль фізичного стану здоров'я водія. Посилення контролю за виконанням функцій безумовно покращує їх характеристики. В межах запропонованого підходу щодо оцінювання надійності виконання завдання в цілому деякі кількісні показники можуть збільшуватися. Припустимо, що в результаті впровадження системи дистанційного контролю за автотранспортом значення критеріїв Швидкість руху в межах міста, Швидкість руху автострадою та Навантаження (стрес) збільшується на 70, 70 і 60 відсотків від тих значень, що доповнюють задані до ідеальних (нормативних). Такі зміни викликають і мінливість як базових функцій, так і процесу перевезення пасажирів в цілому. Результати розрахунків нових кількісних оцінок наведені в табл. 6.6. Кількісні оцінки надійності виконання завдання на належному рівні і ризику порушення графіку перевезення для сценаріїв 1 і 2 за умов проведення дистанційного контролю обчислені за формулами (6.2) і (6.3) і відповідно становлять $S_1 = 0,6528$, $R_1 = 0,3472$ і $S_2 = 0,3735$, $R_2 = 0,6265$. Порівнюючи R_1 і R_2 з R_{sc1} і R_{sc2} , можна помітити, що додатковий контроль на різних етапах процесу

пасажирського перевезення дозволяє зменшити відповідно на 17,4% і 19,8% ризик виникнення інциденту.

Таблиця 6.6

Мінливість базових функцій транспортного процесу ПАП, викликана зміною їх характеристик за умови проведення дистанційного контролю над процесом руху і станом водія

Номер функції, j	Характеристика, k	Ваговий коефіцієнт ω_{jk}	Кількісна оцінка параметрів за умов		Кількісна оцінка виконання базової функції за умов	
			Сценарію 1	Сценарію 2	Сценарію 1	Сценарію 2
Підготовка ПАП						
1	input	0,07	0,99	0,99	0,0690	0,0690
	time	0,13	0,93	0,81	0,1224	0,1062
	precond	0,07	0,99	0,99	0,0690	0,0690
	resource	0,26	0,93	0,81	0,2445	0,2121
	control	0,47	0,88	0,91	0,4105	0,4254
	output	$F_1 =$			0,9154	0,8818
Подача ПА для здійснення посадки пасажирів						
2	input	0,15	0,93	0,81	0,1408	0,1222
	time	0,15	0,93	0,72	0,1401	0,1085
	precond	0,08	0,99	0,99	0,0794	0,0794
	resource	0,08	0,93	0,72	0,0745	0,0577
	control	0,54	0,97	0,90	0,5221	0,4817
	output	$F_2 =$			0,9569	0,8495
Посадка пасажирів						
3	input	0,07	0,83	0,62	0,0613	0,0452
	time	0,08	1,00	1,00	0,0771	0,0771
	precond	0,10	0,99	0,99	0,1017	0,1017
	resource	0,38	0,93	0,72	0,3541	0,2742
	control	0,37	0,97	0,90	0,3547	0,3272
	output	$F_3 =$			0,9490	0,8255
Транспортування пасажирів						
4	input	0,19	0,83	0,62	0,1613	0,1190
	time	0,09	1,00	0,83	0,0944	0,0783
	precond	0,13	1,00	1,00	0,1319	0,1319
	resource	0,19	0,92	0,87	0,1783	0,1680
	control	0,39	0,95	0,83	0,3674	0,3190
	output	$F_4 =$			0,9332	0,8163
Висадка пасажирів на зупинці						
5	input	0,31	0,83	0,89	0,2614	0,2800
	time	0,15	0,74	0,56	0,1136	0,0866
	precond	0,15	0,83	0,62	0,1281	0,0945
	resource	0,23	0,93	0,72	0,2092	0,1620
	control	0,15	0,95	0,83	0,1459	0,1267
	output	$F_5 =$			0,8582	0,7497
Дистанційний контроль						
6	input	0,31	1,00	1,00	0,0612	0,0612
	time	0,15	0,83	0,89	0,0924	0,0990
	precond	0,15	0,99	0,99	0,0785	0,0785
	resource	0,23	1,00	1,00	0,3455	0,3455
	control	0,15	1,00	1,00	0,4027	0,4027
	output	$F_6 =$			0,9805	0,9871

Отже, запровадження посиленого контролю за виконанням транспортної задачі призведе до збільшення надійності і зменшення визначеної величини

ризик. В табл. 6.7 наведена порівняльна інформація про кількісні оцінки всіх базових функцій, що відповідають сценаріям 1 і 2 з урахуванням відсутності і здійснення дистанційного контролю над транспортним процесом в цілому. Порівняння мінливості функцій транспортного процесу за Сценаріями 1 і 2 можна здійснити за допомогою діаграми, представленої на рис. 6.11. Наочно зріст значень мінливості функцій із появою функції Дистанційний контроль за умов дотримання нормативів і їх порушення можна побачити на діаграмах, наведених на рис. 6.12 і 6.13.

Таблиця 6.7

Порівняльна характеристика сценаріїв

Функції	Кількісна оцінка за умов		Величина ризику невиконання робочого завдання ПАП на належному рівні за умов	
	відсутності дистанційного контролю	дистанційного контролю	відсутності дистанційного контролю	дистанційного контролю
Сценарій 1. Транспортний процес ПАП з порушенням регламенту				
Підготовка	0,9161	0,9154	0,781	0,622
Подача	0,9193	0,9569		
Посадка	0,9234	0,9490		
Транспортування	0,8764	0,9332		
Висадка	0,8505	0,8582		
Сценарій 2. Транспортний процес ПАП без порушення регламенту				
Підготовка	0,8825	0,8818	0,42	0,334
Подача	0,7176	0,8495		
Посадка	0,7359	0,8255		
Транспортування	0,6500	0,8163		
Висадка	0,7228	0,7497		

Результати розрахунків мінливості процесу ПП для наведених та інших сценаріїв дозволяють зробити висновок про те, що впровадження додаткового дистанційного контролю над певними діями або учасниками транспортного процесу може суттєво покращити результат виконання завдання перевезення пасажирів. При цьому ризик виникнення інциденту (наприклад, порушення графіку перевезення) зменшується на 15-20% як за умов дотримання нормативних вимог щодо процесу ПП, так і у випадку, коли останні за якихось причин порушуються.

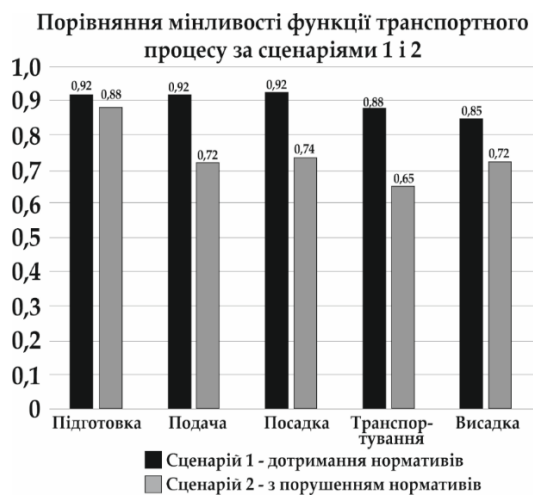


Рис. 6.11 Порівняння мінливості функцій транспортного процесу за сценаріями 1 і 2

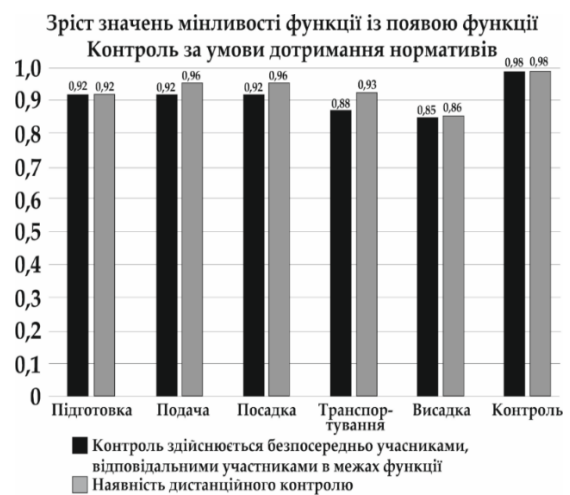


Рис. 6.12 Зріст значень мінливості функцій із появою Функції Контроль за умови дотримання нормативів

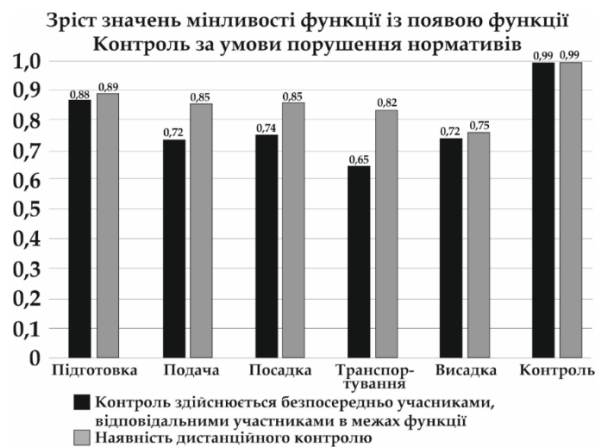


Рис. 6.13 Зріст мінливості функцій із появою Функції Контроль за умови порушення нормативів

6.1.3 Про деякі запобіжні та контрольні заходи щодо підвищення безпеки на об'єктах систем екстреної логістики

1. Посилення контролю за допуском водія до керування ПА має здійснюватися з метою забезпечення безаварійного досвіду керування протягом тривалого часу (не менш 10 років професійного стажу з перевезення пасажирів). Нажаль, цьому питанню в наступний час не приділяється достатньої уваги. Зазвичай, основним критерієм на місцях є допуск водіїв з наявністю відповідної категорії водійських прав.

Для підвищення безпеки ПАП ТЗ мають бути обладнані сучасними системами контролю за станом здоров'я і психофізіологічним станом водія. Серед таких технічних приладів – кермо зі вбудованими датчиками, які контролюють тиск і серцебиття водія, системи контролю міміки обличчя водія, миготіння очей, відхилення ПА від прямолінійного руху та ін. Вони з'єднуються через GPS – навігацію з диспетчером, який може контролювати процес руху ПА на маршруті і при зміні відповідних показників до критичних значень вчасно прийняти рішення про зупинку ТЗ або про заміну водія. Багато виробників ПА серійно випускають ТЗ, які обладнані вказаними приладами, і саме такі автомобілі мають використовуватися для перевезення пасажирів.

Багато аварій стаються через втомленість або сонливість водіїв, тому дослідження у сфері визначення стану водія мають велике значення. В роботі [221] показано, що для цієї цілі ефективним і доступним способом може стати використання мобільних телефонів або портативних комп'ютерів, особливо з використанням нейромережевих алгоритмів, які здатні визначати ключові точки обличчя та оцінювати втому або відволікання водія. Вони дозволяють автоматично аналізувати дані з камери та надавати інформацію в реальному часі. Суттєвою при цьому є швидкість роботи нейронних мереж на мобільних пристроях і якість їх передбачень, тому розвиток архітектур мобільних мереж і алгоритмів розпізнавання ключових точок обличчя безпосередньо на мобільних пристроях безперечно покращить якість вказаних систем. В зазначеній вище роботі описано і проаналізовано ідеї сучасних нейронних мережевих алгоритмів, що дозволили підвищити якість розпізнавання; 2) виділено основні вимоги, що ставляться до алгоритмів пошуку ключових точок з точки зору їх практичного застосування; 3) вказано недоліки існуючих підходів перспективи їх розвитку. Вразливість нейромережевих алгоритмів розпізнавання вивчено в роботі [222].

Додатковий контроль психофізіологічного стану водія можна здійснювати також за допомогою спеціального чек-листа [211], який враховує такі фактори: ергономічний, психосоціальний, індивідуальний (основні

показники здоров'я водія) і дискомфорту. Цей лист дозволяє швидко, методом опитування, виявити основні ризики, що пов'язані зі психофізіологічним станом водія і на підставі отриманих результатів прийняти рішення про допуск водія до керування ПА.

За допомогою встановлених датчиків та камер спостереження трасами (автобанами) можна контролювати перевищення швидкісного режиму, припускання помилок при здійсненні обгону, порушення світлофорного регулювання і дорожньої розмітки, неправильний вибір дистанції та ін.

Отже, контроль за виконанням транспортного процесу перевезення пасажирів, спостереження за зміною психофізіологічного або фізичного стану водія, інспектування дотримання елементарних умов безпеки пасажирями на всіх етапах перевізного процесу надає змогу втручатися і приймати управлінські рішення, спрямовані на покращення обслуговування пасажирів, приміром, про своєчасну заміну водія під час виконання транспортної роботи.

2. Важливим показником інтегрованості транспортної системи є раціональне користування існуючими транспортними мережами, враховуючи переваги їх географії і комунікаційної спроможності забезпечити своєчасну й якісну доставку вантажу. Роботу усіх складових сучасних систем логістики потрібно організовувати ефективно, зокрема, за рахунок раціонального завантаження виробничого і технічного обладнання, інших матеріальних і людських ресурсів. Їх діагностичні сервіси повинні базуватися на використанні сучасних технологій та технологічного обладнання, наявності висококваліфікованого персоналу та широти спектру послуг.

Математичний опис роботи підприємства (на прикладі СТО) з раціональним розподілом його ресурсів запропонований в роботі [223]. Особливістю запропонованого підходу щодо вирішення задачі резервування ресурсів підприємства є той факт, що програмна реалізація математичної моделі дозволить, по-перше, постійно відслідковувати зайнятість ресурсів і враховувати непередбачені події; по-друге, скласти такий розклад роботи, який забезпечить збільшення пропускної спроможності. Специфікою

представленої моделі, що відрізняє її від існуючих моделей задач теорії розкладів, є можливість вирішувати задачу з декількома різними критеріями оптимальності одночасно і надавати всі можливі варіанти обслуговування клієнту на розсуд для подальшого вибору. Такий спосіб взаємодії клієнта і сервісного підприємства однозначно сприяє якості обслуговування і підвищенню рівня безпеки, зокрема, транспортних процесів пасажирських автомобільних перевезень.

3. Важливою запорукою підвищення небезпеки на об'єктах систем екстреної логістики є також вивчення закономірностей змін дисперсності ґрунту під час просідання, що супроводжують деградацію ґрунту, проведення заходів щодо його укріплення на певних територіях або ділянках доріг.

В умовах техногенезу ґрунт еволюціонує як багатокомпонентна складна система. Необхідність прогнозу деградації просадкових властивостей лесоподібних ґрунтів у зоні аерації, викликаній зміною мікроагрегатного складу в усьому діапазоні твердої фази, обґрунтовано в роботі [215]. На прикладі плейстоценових відкладів Середнього Придніпров'я тут вивчено зв'язки між мікроструктурою лесового ґрунту і його просадністю, використовуючи методи стохастичного аналізу даних та індуктивного моделювання. Фізичний стан та дисперсність ґрунту суттєво впливають на значення просадності, незалежно від генезису ґрунту. Побудована за допомогою методу групового урахування аргументів функціональна залежність підтверджує більш вагоме значення вологості та щільності ґрунту, ніж вміст фракцій, за умови, що фракції визначені відповідно діючого стандарту. Доведено що вміст пов'язаних тонких пилюватих і глинистих частинок, агрегатів є фактором просідання на етапі втрати структурної міцності (0,1 МПа) та в зоні дії додаткових навантажень. Закономірним є зменшення розмірів частинок, що вивільняються, з ростом тиску. Ця закономірність порушується в зонах техногенного перетворення структури ґрунту.

4. Іншим запобіжним заходом щодо підвищення рівня безпеки на підприємствах гірничо-металургійного комплексу та під час евакуаційних процесів з причин техногенних аварій є удосконалення засобів індивідуального захисту. Розробці нової техніки для оптимізації геометричних параметрів фільтрувальної коробки маскувального апарата на основі математичного моделювання потоку повітря у фільтрувальній коробці маскувального апарата присвячено роботу [214]. У ході аналізу фільтрувальна коробка була розділена на кілька зон для оцінки процесу руху пиловмісних та газових потоків. Отримані залежності розподілу швидкостей потоку повітря для фільтрувальних коробок різної геометрії та встановлені зв'язки між її аеродинамічними та геометричними параметрами. Оптимізовані геометричні параметри фільтрувальної коробки маскувального апарата, включаючи діаметр вихідного порту, висоту конфузора, зсув вихідного порту відносно центру коробки фільтру. Математична модель, запропонована в зазначеній роботі, дозволяє визначати геометричні та аеродинамічні параметри фільтрувальної коробки з мінімальним опором для потоку повітря та покращити захисну ефективність маскувального апарата.

5. Ефективним засобом уникнення небажаного входу на територію будь-якого підприємства сторонніх осіб, тим паче, на небезпечний виробничий об'єкт – виробничий об'єкт, під час експлуатації якого високий ризик аварій чи інших інцидентів (аварійні ситуації), а також ефективним рішенням для диференціації доступу працівників до його приміщення, є системи контролю доступу (СКД). Зазвичай їх включають до інтегрованих систем безпеки.

Існують різні СКД, приміром, відокремлені або розгалужені багаторівневі системи прохідних. Вибір конкретної СКД залежить від завдань, що стоять перед розробниками. Багато сучасних підприємств використовують турнікети чи розумні двері, які оснащені сканерами карт доступу. В [224] розроблено мобільну систему контролю доступу до дверей або технологічного обладнання на виробничих підприємствах. Ідентифікація приладу або об'єкту відбувається за допомогою прикріпленої RFID мітки. При наданні доступу

фотографія користувача перевіряється, чи є фотографія достовірною або ж підробкою – фотографією іншої фотографії. В основі зазначеної системи покладено змінювану згорткову мережу. Впровадження розроблених на основі RFID мітки СКД на підприємствах, сприятимуть зниженню ризику аварій з причин умисних дій.

6.2. Оптимізація витрат на запобіжні заходи щодо зниження професійного ризику небезпеки до прийняттого рівня

6.2.1 Про керування ризиками виникнення небезпек і вибір захисних заходів на об'єктах систем екстреної логістики

Визначальним фактор забезпечення постійного розвитку діяльності та досягнення стабільного успіху будь-якого підприємства є впровадження інтегрованої системи менеджменту (ICM, Integrated Management System, IMS) – єдиної системи для керування певними аспектами його діяльності у відповідності до міжнародних стандартів, такими як охорона праці та безпеки на робочому місці, якість, навколишнє середовище, енергетика тощо.

ICM визначає комплекс взаємопов'язаних процесів, які використовують єдиний фонд людських ресурсів, інформації, матеріалів, інфраструктури та фінансових ресурсів з метою всебічного врахування вимог всіх зацікавлених сторін. Концепцією такої системи є процесний підхід на основі «ризик-орієнтованого мислення», що дозволяє ідентифікувати небезпеки, оцінити їх ризики і втрати. В результаті з'являється можливість обґрунтовувати й організовувати захисні й запобіжні заходи щодо забезпечення стійкості організації в мінливих умовах. Відтак, метою керування ризиками є передбачення розвитку негативних подій під дією різних видів руйнівних небезпек та небезпечних чинників та пошук шляхів, що сприяють зменшенню їх ризиків. Використання інтегрованої системи менеджменту створює основу для оптимізації операцій і підвищення ефективності запобіжних або захисних

заходів. Схему процесу керування ризиками наведено на рис. 6.14. Наведемо основні етапи керування ризиками.

1. Ідентифікація складових ризику: небезпеки, небезпечної події та негативних наслідків. Найчастіше на підприємствах впроваджують таку комбінацію стандартів – ISO 9001, ISO 14001, ISO 45001, за якою можна виділити наступні групи небезпек: природні; біолого-соціальні; техногенні; екологічні; професійні; інформаційні; економічні; терористичні; воєнні; економічні, якості. Встановлюється зв'язок між небезпекою, небезпечною подією і наслідками, які впливають на діяльність організації. Економічні втрати характеризуються порушенням нормальної економічної та фінансової діяльності підприємства завдяки втратам вартості його основних фондів. Через появу небезпечних подій воно може недоотримати потенційно можливі надходження, втратити контракти з постачальниками та споживачами. Може виникнути необхідність матеріальної компенсації постраждалим від прояву небезпечних подій та інше.

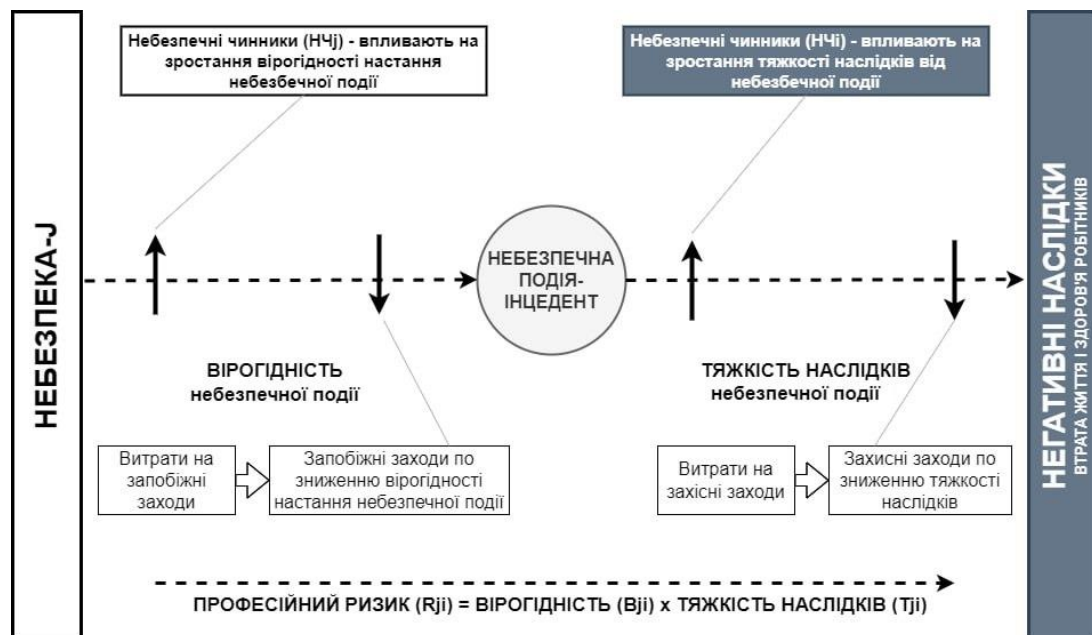


Рис. 6.14. Схема процесу керування професійними ризиками

Екологічні втрати від небезпек – це порушення життєдіяльності на певній території, що проявляються у збільшенні захворювання і/або загибелі людини; погіршення стану навколишнього середовища. Професійні втрати

характеризуються створенням загрози життю і здоров'ю персоналу організації, переживанням стресу та фізіологічними перенавантаженнями через порушення виробничих циклів, відмови технічних засобів виробництва, які призводять до небезпечних ситуацій (аварій, пожеж, вибухів).

2. Ідентифікація небезпечних чинників (НЧ), небезпечних дій чи бездіяльності, які збільшують вірогідність настання небезпечної події і тяжкості наслідків за допомогою, приміром, анкетування, спостереження, опитування працівників, дискусії, SWOT-аналізу, PEST-аналізу, PIMS-аналізу та інш.

3. Аналіз і визначення ризиків безпеки j від впливу всіх виявлених небезпечних чинників, які визначаються за наступною формулою:

$$R_j = \sum_{i=1}^n (B_{ji} \times TH_{ji}),$$

де R_j – рівень ризику безпеки j від небезпечних чинників i ; B_{ji} – ймовірність настання небезпечної події від безпеки j під впливом відповідного небезпечного чинника; TH_{ji} – ступень тяжкості наслідків безпеки j під впливом небезпечного чинника i . Для визначення ймовірності настання небезпечної події та встановлення шкал тяжкості наслідків користуються рекомендаціями стандарту ISO 31073:2022, який визначає ймовірність як міра можливості виникнення, що подається числом між 0 та 1, де 0 – неможливість, а 1 – абсолютна впевненість. Визначення інтервалів тяжкості наслідків від небезпечних чинників здійснюється за певними критеріями експертами в галузі охорони праці і безпеки життєдіяльності.

4. Оцінювання ризиків, виходячи із визначених умов прийнятності чи неприйнятності їх рівня. Підсумовуються бали від впливу всіх виявлених небезпечних чинників. Порівнюється розрахована величина ризику з критичною, яка встановлюється, виходячи із матриці оцінювання ризиків, з урахуванням фінансових можливостей організації. У разі неприйнятності

загальних втрат від визначених рівнів ризику здійснюється перехід до наступного етапу. Усі зібрані і розраховані дані систематизують у табл. 6.8.

Таблиця 6.8

Карта керування професійний ризиком

№ п/п	Ідентифікація				Первинний аналіз і визначення рівня ПР			Первинна оцінка ПР від відповідного небезпечного чинника*	Запобіжні і захисні заходи по зниженні ПР до прийнятного рівня		Повторний аналіз і визначення рівня ПР з урахуванням запобіжних і захисних заходів			Повторна оцінка ПР в з урахуванням запобіжних і захисних заходів*	Ефективність запобіжних і захисних заходів ПР
	Небезпека	Небезпечна подія	Негативні наслідки	Небезпечний чинник	Вірогідність настання небезпечної події	Ступень тяжкості наслідків небезпечної події	Професійний ризик від небезпека - j з урахуванням НЧ - i		Запобіжний і захисний захід по зниженню ПР	Витрати на запобіжні і захисні заходи	Вірогідність настання небезпечної події	Ступень тяжкості наслідків небезпечної події	Професійний ризик від небезпека - j з урахуванням НЧ - i		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
j	1/0	1/0	1/0	НЧ _{j1}	В _{пj1}	Т _{пj1}	Р _{пj1}	+/-	M _{j1}	C _{j11}	B _{кj11}	T _{кj11}	R _{кj11}	+/-	Ez _{j1}
									...	...	...	...	...		
									M _{j1}	C _{j1m}	B _{кj1m}	T _{кj1m}	R _{кj1m}		
				НЧ _{j2}	В _{пj2}	Т _{пj2}	Р _{пj2}	+/-	M _{j2}	C _{j2}	B _{кj2}	T _{кj2}	R _{кj2}	+/-	Ez _{j2}
									M _{j1}	C _{j1m}	B _{кj1m}	T _{кj1m}	R _{кj1m}		
				НЧ _{j3}	В _{пj3}	Т _{пj3}	Р _{пj3}	+/-	M _{j3}	C _{j31}	B _{кj31}	T _{кj31}	R _{кj31}	+/-	Ez _{j3}
				...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
				НЧ _{jn}	В _{пjn}	Т _{пjn}	Р _{пjn}	+/-	M _{jn}	C _{jnm}	B _{кjnm}	T _{кjnm}	R _{кjnm}	+/-	Ez _{jn}
Оцінка з урахуванням всіх НЧі загального ПР від небезпеки j				початкового			ΣR _{пjp}	+/-	ΣC _{jp}	C _j	Кінцевого		ΣR _{кjp}	+/-	ΣEz _{jp}

* +/- відповідає Прийнятний / Неприйнятний ризик

5. Обґрунтування вибору додаткових запобіжних і захисних заходів, виходячи з того, який рівень втрат для організації є найбільш критичним.

6. Аналіз та повторне оцінювання ризику для з'ясування результативності та ефективності запропонованих заходів чи дій.

7. Документування рівнів ризику, де створюються відповідні реєстри, як небезпек так і небезпечних чинників, а також описуються можливі наслідки від їх прояву.

Розглянемо питання про раціональний вибір комплексу заходів щодо підвищення безпеки, зокрема, на гірничих або металургійних підприємствах, для запобігання або під час ліквідації наслідків надзвичайних техногенних ситуацій (5 етап керування ризиками). Сформулюємо задачі визначення пріоритетних напрямків зі зниження ризиків в умовах обмеження фінансових ресурсів.

Задача 1. Визначити комплекс запобіжних та/або захисних заходів, які потрібно провести задля зниження професійного ризику до прийнятного рівня за умов мінімізації витрат на них.

Задача 2. Знайти комплекс запобіжних заходів, які знижують рівень професійного ризику до прийнятного рівня і забезпечують максимальну сумарну ефективність витрат.

Задача 3. Знайти таку мінімальну сукупність запобіжних або захисних заходів, яка за умов обмежених фінансових ресурсів на них знижувала б професійні ризики до допустимих норм.

Для побудови математичних моделей введемо наступні позначення для параметрів задач: $j, j = \overline{1, J}$ – порядковий номер небезпеки; $Id_j \in \{1, 2, 3\}$, $j = \overline{1, J}$ – ідентифікаційна ознака небезпеки: для небезпеки у вузькому сенсі $Id_j = 1$, для небезпечної події $Id_j = 2$, для небезпечних наслідків $Id_j = 3$. Цей ідентифікатор є лише інформативним і не використовується у математичних конструкціях; $MaxR^j$ – максимально допустимий сумарний професійний ризик; $Biudget^j$ – максимально можлива кількість коштів, що може бути використана для проведення запобіжних заходів; $i, i = \overline{1, n_j}$ – порядковий номер небезпечного чинника, який викликаний небезпекою j ; M_i^j – кількість запобіжних або захисних заходів, які можна здійснити задля зниження професійного ризику.

Для кожного чинника i , викликаного небезпекою j ($i = \overline{1, n_j}, j = \overline{1, J}$): $P_{min_i} \leq Pst_i^j < 1$ – його початкова вірогідність, $P_{min_i} > 0$ (вважається, що завжди є можливість появи НЧ); Tst_i^j – початкова тяжкість наслідків від нього,

$T_{min_i} \leq Tst_i^j \leq T_{max_i}$, де T_{min_i}, T_{max_i} – експертні оцінки найменшої й найбільшої ступені тяжкості наслідків від небезпечного чинника при найгірших і найкращих виробничих умовах; $Rst_i^j = Pst_i^j \cdot Tst_i^j$ – початковий професійний ризик; $AllowedR_i^j$ – рівень прийнятного ризику; $Ctotal_i^j$ – загальна сума витрат на запобіжні заходи; Pf_i^j – фінальна вірогідність; Tf_i^j – фінальна тяжкість наслідків; Rf_i^j – фінальний професійний ризик; E_i^j – ефективність витрат, розрахована на одну умовну грошову одиницю:

$$E_i^j = \frac{Rst_i^j - Rf_i^j}{Ctotal_i^j}.$$

Для кожного заходу m , який знижує ПР від небезпечного чинника i , викликаного небезпекою j ($m = \overline{1, M_i^j}$, $i = \overline{1, n_j}$, $j = \overline{1, J}$): rP_{mi}^j і rT_{mi}^j – величини, які показують, на скільки відсотків проведення заходу знижує вірогідність НЧ і тяжкість наслідків ТН відповідно; C_{mi}^j – витрати на проведення заходу; R_{mi}^j – кінцевий рівень професійного ризику після проведення заходу. Будемо вважати, що кожен із заходів впливає на свої чинники, що сприяють зменшенню професійного ризику, а самі чинники є незалежними один від одного.

Змінні величини, позначимо їх через $x_{mi}^j \in \{0,1\}$, є булевими, що визначаються у такий спосіб:

$$x_{mi}^j = \begin{cases} 1, \text{ якщо } m - \text{й захід потрібно проводити} \\ 0 \text{ у протилежному випадку, } m = \overline{1, M_i^j}, i = \overline{1, n_j}, j = \overline{1, J}. \end{cases}$$

Побудуємо математичні моделі для вище сформульованих задач для однієї небезпеки j у припущенні, що усі заходи, що розглядаються, можуть впливати лише на ПР від саме цієї небезпеки. А напрямком подальших досліджень будемо вважати узагальнення запропонованих моделей раціонального вибору комплексу запобіжних заходів щодо зниження рівня професійного ризику на випадок наявності таких заходів, які можуть покращити ситуацію для декількох небезпек.

Задача 1. Знайти такі значення $x_{mi}^j, m = \overline{1, M_i^j}, i = \overline{1, n_j}$, за яких функція

$$Z^j = \sum_{i=1}^{n_j} Ctotal_i^j = \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{m=1}^{M_i^j} C_{mi}^j x_{mi}^j \quad (6.4)$$

набувала б мінімального значення і для усіх $i = \overline{1, n_j}$, таких що $Rst_i^j \geq AllowedR_i^j$, виконувались наступні умови:

$$Pf_i^j = \max \left\{ P\_min_i, Pst_i^j \left(1 - \sum_{m=1}^{M_i^j} rP_{mi}^j \cdot x_{mi}^j \right) \right\}; \quad (6.5)$$

$$Tf_i^j = \max \left\{ T\_min_i, Tst_i^j \left(1 - (Tst_i^j - T\_min_i) \sum_{m=1}^{M_i^j} rT_{mi}^j \cdot x_{mi}^j \right) \right\}, \quad (6.6)$$

$$Rf_i^j = Pf_i^j \cdot Tf_i^j; \quad Rf_i^j \leq AllowedR_i^j; \quad (6.7)$$

$$\sum_{i=1}^{n_j} Rf_i^j \leq MaxR^j; \quad (6.8)$$

$$x_{mi}^j \in \{0,1\}, \forall m = \overline{1, M_i^j}, i = \overline{1, n_j}. \quad (6.9)$$

Зауваження: виконання умов (6.5) – (6.9) лише для усіх $i = \overline{1, n_j}$, таких що $Rst_i^j \geq AllowedR_i^j$, можна забезпечити, заздалегідь визначивши:

$$\text{якщо } Rst_i^j \leq AllowedR_i^j, \text{ то } x_{mi}^j = 0 \text{ для усіх } m = \overline{1, M_i^j}. \quad (6.10)$$

або формулювати оптимізаційні задачі лише для небезпечних чинників з рівнем ризику, що перевищує допустиму границю.

Задача 2. Знайти такі значення $x_{mi}^j, m = \overline{1, M_i^j}, i = \overline{1, n_j}$, за яких функція

$$Effect^j = \sum_{i=1}^{n_j} E_i^j = \sum_{i=1}^{n_j} \frac{Rst_i^j - Rf_i^j}{Ctotal_i^j} \quad (6.11)$$

набувала б максимального значення і $\forall i = \overline{1, n_j}$ виконувались умови (6.5) – (6.9) та наступні обмеження:

$$\sum_{i=1}^{n_j} Ctotal_i^j = \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{m=1}^{M_i^j} C_{mi}^j x_{mi}^j \leq Biudget^j. \quad (6.12)$$

Задача 3. Знайти такі значення $x_{mi}^j, m = \overline{1, M_i^j}, i = \overline{1, n_j}$, за яких функція

$$TotalMeasure^j = \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{m=1}^{M_i^j} x_{mi}^j \quad (6.13)$$

набувала б мінімального значення і для усіх $i = \overline{1, n_j}$ виконувались умови (6.5) – (6.12).

6.2.2 Аналіз результатів розв'язання модельних оптимізаційних задач вибору комплексу заходів щодо зниження професійних ризиків

Змоделюємо декілька виробничих ситуацій і розв'яжемо відповідні задачі раціонального вибору сукупності заходів щодо зниження професійних ризиків за різних критеріїв оптимізації. Розрахунки проведемо за допомогою надбудови «Пошук рішення» в Microsoft Excel. Зазначимо, для уникнення похибки ділення на нуль під час реалізації математичних моделей розрахунків ефективності заходів будемо проводити за наступною формулою:

$$E_i^j = \frac{Rst_i^j - Rf_i^j}{(\sigma + Cttotal_i^j)},$$

де $\sigma > 0$ – деяка мала величина, порядку 10^{-8} або 10^{-6} .

Припустимо, що на підприємстві виокремлено 4 небезпечні чинники, для яких експертні оцінки професійного ризику перевищують допустимі норми. Відділом з техніки безпеки сумісно з фінансовим розроблені запобіжні дії, розраховано очікуваний результат щодо зниження або ймовірності настання небезпеки, або тяжкості її наслідків, а також матеріальні витрати (у грошовому еквіваленті). Ці дані в таблицях нижче зазначено у стовпчиках 1 – 10. Розрахункові дані, отримані у результаті реалізації моделі (6.4) – (6.9), наведено у табл. 6.9.

Як можна помітити, розв'язуючи задачу оптимального вибору сукупності заходів з метою досягнення прийняттого рівня професійного ризику по всіх небезпечним чинникам за мінімальних витрат (що складають **436,207** з максимально можливих 750,412) вдалося сформувати комплекс із **16** заходів (відповідні 1 елементам у стовпчику 7), і знизити ПР до допустимого рівня. При цьому сумарна ефективність вкладення ресурсів становить **0,1647**. Максимальний ПР вдалося знизити на **67%**, сумарний – на **75%**.

Таблиця 6.9

Мінімізація витрат на запобіжні заходи

Небезпека/наслідки події/наслідки	Ймовірність настання небезпечної події	Ступень тяжкості наслідків небезпечної події	Професійний ризик від небезпеки - j з урахуванням НЧ - i	граничний ризик	захід (i,m)	вибір заходу по зниженню ПР	Витрати на запобіжні і захисні заходи	доля зниження вірогідності небезпеки	доля зниження тяжкості	Ймовірність настання небезпечної події	Ступень тяжкості наслідків небезпечної події	Професійний ризик після проведення заходу	ефективність
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0,87 min 0,03	8 Mn1 Mx10	6,96	5	1,1	1	9,997	0,05	0	0,365	6,25	2,284	0,0424
					1,2	1	18,638	0,1	0,05				
					1,3	0	52,279	0	0,2				
					1,4	1	13,819	0,15	0				
					1,5	1	50,830	0,08	0,1				
					1,6	1	5,304	0,2	0				
					1,7	1	11,690	0	0,1				
2	0,75 min 0,03	9 min1 Mx10	6,75	5	2,1	0	71,634	0,27	0,01	0,03	8,36	0,251	0,0953
					2,2	1	26,397	0,38	0,05				
					2,3	1	30,173	0,43	0,03				
					2,4	1	11,626	0,47	0				
3	0,8 min 0,03	6 min1 Mx10	4,8	5	3,1	1	60,476	0,22	0	0,32	5,85	1,872	0,01502
					3,2	1	57,168	0,14	0,01				
					3,3	0	56,283	0	0,15				
					3,4	1	72,138	0,19	0				
					3,5	1	5,156	0,05	0,02				
4	0,32 min 0,03	4 min1 Mx10	1,28	5	4,1	1	16,300	0,26	0	0,134	3,94	0,53	0,01195
					4,2	0	58,864	0,07	0,08				
					4,3	1	20,878	0,15	0,02				
					4,4	0	75,145	0,04	0,12				
					4,5	1	25,616	0,17	0				
max			6,96	5		sum	750,412				max	2,284	
sum			19,79	5		16	436,207					4,936	0,1647

зниження ризику, %

67,188

У результаті розв'язання задачі максимізації ефективності вкладення ресурсів (критерій (6.11)) за тих самих умов і обмеженого бюджету у 500 ум. грош. од. отримано інший комплекс з **16** заходів, яким відповідають сумарні витрати **497,494**. Ефективність склала **0,20342** (табл. 6.10), що у порівнянні із попереднім результатом збільшилась лише на **23,5%**.

Таблиця 6.10 Максимізація ефективності витрат на запобіжні заходи

Небезпека/небезпечна подія/наслідки	Ймовірність настання небезпечної події	Ступень тяжкості наслідків небезпечної події	Професійний ризик від небезпеки - і з урахуванням НЧ - і	граничний ризик	захід (і,т)	вибір заходу по зниженню ПР	Витрати на запобіжні і захисні заходи	доля зниження вірогідності небезпеки	доля зниження тяжкості		Ймовірність настання небезпечної події	Ступень тяжкості наслідків небезпечної події	Професійний ризик після проведення заходу	ефективність
1	0,87	8	6,96	5	1,1	0	9,997	0,05	0	0,03481	0,365	4,85	1,77219	0,03191
					1,2	1	18,638	0,1	0,05	0,05205				
					1,3	1	52,279	0	0,2	0,02330				
					1,4	1	13,819	0,15	0	0,07555				
					1,5	1	50,830	0,08	0,1	0,02198				
min	0,03	1			1,6	1	5,304	0,2	0	0,26242				
					1,7	1	11,690	0	0,1	0,05209				
2	0,75	9	6,75	5	2,1	1	71,634	0,27	0,01	0,02605	0,075	8,76	0,657	0,14577
					2,2	1	26,397	0,38	0,05	0,10422				
min	0,03	1			2,3	0	30,173	0,43	0,03	0,09960				
					2,4	1	11,626	0,47	0	0,27287				
3	0,8	6	4,8	5	3,1	1	60,476	0,22	0	0,01746	0,32	5,1	1,632	0,01261
					3,2	1	57,168	0,14	0,01	0,01236				
					3,3	1	56,283	0	0,15	0,01066				
min	0,03	1			3,4	1	72,138	0,19	0	0,01264				
					3,5	0	5,156	0,05	0,02	0,06129				
4	0,32	4	1,28	5	4,1	1	16,300	0,26	0	0,02042	0,182	4	0,7296	0,01313
					4,2	0	58,864	0,07	0,08	0,00274				
					4,3	0	20,878	0,15	0,02	0,00998				
min	0,03	1			4,4	0	75,145	0,04	0,12	0,00215				
					4,5	1	25,616	0,17	0	0,00849				
max			6,96	5			750,412					max	1,77219	0,14577
sum			19,79	5		15	497,494					сума	4,79079	0,20342
виділено							500,0	зниження ризику %			71,5375			

Якщо за тих самих умов розв'язувати задачу 3, то можна отримати сукупність у 15 заходів і значно більшим бюджетом у **550,199** ум. грош.од., та меншою ефективності витрат **0,11687** (нижче за найкращий результат на **42,5%**). Вхідні і розрахункові дані наведено у табл. 6.11.

Таблиця 6.11 Мінімізація кількості запобіжних заходів для досягнення допустимого рівня професійного ризику

Небезпека/небезпечна подія/наслідки	Ймовірність настання небезпечної події	Ступінь тяжкості наслідків небезпечної події	Професійний ризик від небезпеки - і з урахуванням НЧ - і	граничний ризик	захід (i,m)	вибір заходу по зниженню ГР	Витрати на запобіжні і захисні заходи	доля зниження вірогідності небезпеки	доля зниження тяжкості	Ймовірність настання небезпечної події	Ступінь тяжкості наслідків небезпечної події	Професійний ризик після проведення заходу	ефективність
1	0,87	8	6,96	5	1,1	0	9,997	0,05	0	0,4089	4,85	1,983165	0,03262
					1,2	1	18,638	0,1	0,05				
					1,3	1	52,279	0	0,2				
					1,4	1	13,819	0,15	0				
					1,5	1	50,830	0,08	0,1				
min	0,03	1			1,6	1	5,304	0,2	0				
					1,7	0	11,690	0	0,1				
2	0,75	9	6,75	5	2,1	0	71,634	0,27	0,01	0,03	8,52	0,2556	0,05922
					2,2	0	26,397	0,38	0,05				
min	0,03	1			2,3	1	30,173	0,43	0,03				
					2,4	1	11,626	0,47	0				
3	0,8	6	4,8	5	3,1	1	60,476	0,22	0	0,36	5,2	1,872	0,01189
					3,2	1	57,168	0,14	0,01				
					3,3	0	56,283	0	0,15				
min	0,03	1			3,4	1	72,138	0,19	0				
					3,5	0	5,156	0,05	0,02				
4	0,32	4	1,28	5	4,1	1	16,300	0,26	0	0,1824	4	0,7296	0,01313
					4,2	0	58,864	0,07	0,08				
					4,3	1	20,878	0,15	0,02				
min	0,03	1			4,4	1	75,145	0,04	0,12				
					4,5	1	25,616	0,17	0				
max			6,96	5			750,412				max	1,9832	0,05922
sum			19,79	5		15	550,199					4,8404	0,11687
виділено							700,0	зниження ризику %				71,506	

Якщо додатково розробити заздалегідь більш ефективні заходи, то розв'язуючи поставлені задачі можна отримати очікувані результати, а саме, зазначені заходи будуть серед відібраних, про що свідчать розрахункові дані з таблиць 6.13 – 6.15. В них представлений оптимальний вибір із розширеного списку комплексу запобіжних заходів задля зниження професійного ризику за критеріями мінімізації витрат, максимізації ефективності використаних матеріальних ресурсів, мінімізації кількості заходів відповідно.

Таблиця 6.12 Мінімізація витрат з додатковими можливими заходами

Небезпека/небезпечні а події/наслідки	Ймовірність настання небезпечної події	Ступень тяжкості наслідків небезпечної події	Професійний ризик від небезпека - і з урахуванням НЧ - і	граничний ризик	захід (i,m)	вибір заходу по зниженню ПР	Витрати на запобіжні і захисні заходи	доля зниження вірогідності небезпеки	доля зниження тяжкості	Ймовірність настання небезпечної події	Ступень тяжкості наслідків небезпечної події	Професійний ризик після проведення заходу	ефективність
1	0,87	8	6,96	5	1,1	1	9,997	0,05	0	0,261	6,6	1,7226	0,07729
					1,2	1	18,638	0,1	0,05				
					1,3	0	52,279	0	0,2				
					1,8	1	20,000	0,2	0,15				
					1,4	1	13,819	0,15	0				
					1,5	0	50,830	0,08	0,1				
min	0,03	1			1,6	1	5,304	0,2	0				
					1,7	0	11,690	0	0,1				
2	0,75	9	6,75	5	2,1	0	71,634	0,27	0,01	0,03	8,36	0,2508	0,09530
					2,2	1	26,397	0,38	0,05				
min	0,03	1			2,3	1	30,173	0,43	0,03				
					2,4	1	11,626	0,47	0				
3	0,8	6	4,8	5	3,1	1	60,476	0,22	0	0,432	5,9	2,5488	0,01634
					3,2	0	57,168	0,14	0,01				
					3,3	0	56,283	0	0,15				
min	0,03	1			3,4	1	72,138	0,19	0				
					3,5	1	5,156	0,05	0,02				
4	0,32	4	1,28	5	4,1	1	16,300	0,26	0	0,1184	4	0,4736	0,01242
					4,2	0	58,864	0,07	0,08				
					4,6	0	33,800	0,1	0,2				
					4,7	1	23,000	0,2	0				
					4,8	0	10,000	0	0,16				
					4,3	0	20,878	0,15	0,02				
min	0,03	1			4,4	0	75,145	0,04	0,12				
					4,5	1	25,616	0,17	0				
max			6,96	5		сума	837,212				max	2,5488	
сума			19,79	5		14	338,64					4,9958	0,20135

зниження ризику, % **63,379**

У порівнянні із попередніми результатами значення критеріїв якості покращились: мінімальні витрати 338,64 (замість 436,207, зменшились на 22,37%), сумарна ефективність 0,26243 (замість 0,20342, збільшилась на 29%) і мінімальна кількість заходів **12** (замість **15**).

Розв'язуючи задачу 2, збільшено ефективність вкладення коштів у запобіжні заходи майже вдвічі (на 99,65%) у порівнянні з ефективністю мінімальної кількості заходів, що дозволяють знизити ризик до допустимих норм(задача 3 за тих самих умов).

Якщо порівнювати результати розв'язання задач 1 і 2 за тих самих нових умов, то за рахунок максимізації ефективності витрат останні хоч і збільшилися на 21,17% з 338,64 до 410,316, та їх вкладення стало ефективнішим з точки зору зменшення професійного ризику на 30,33%.

Таблиця 6.13 Максимізація ефективності витрат з додатковими заходами

Небезпека/небезпечна подія/наслідки	Ймовірність настання небезпечної події	Ступень тяжкості наслідків небезпечної події	Професійний ризик від небезпечки - і з урахуванням НЧ - і	граничний ризик	захід (i, m)	вибір заходу по зниженню ПР	Витрати на запобіжні і захисні заходи	доля зниження вірогідності небезпечки	доля зниження тяжкості	ефективність заходу	Ймовірність настання небезпечної події	Ступень тяжкості наслідків небезпечної події	Професійний ризик після проведення заходу	ефективність
1	0,87	8	6,96	5	1,1	0	9,997	0,05	0	0,0348	0,304	6,6	2,0097	0,0857
					1,2	1	18,638	0,1	0,05	0,0520				
					1,3	0	52,279	0	0,2	0,0233				
					1,8	1	20,000	0,2	0,15	0,1061				
					1,4	1	13,819	0,15	0	0,0755				
					1,5	0	50,830	0,08	0,1	0,0219				
min	0,03	1			1,6	1	5,304	0,2	0	0,2624				
max		10			1,7	0	11,690	0	0,1	0,0520				
2	0,75	9	6,75	5	2,1	0	71,634	0,27	0,01	0,0260	0,112	8,6	0,9675	0,1520
					2,2	1	26,397	0,38	0,05	0,1042				
min	0,03	1			2,3	0	30,173	0,43	0,03	0,0996				
max		10			2,4	1	11,626	0,47	0	0,2728				
3	0,8	6	4,8	5	3,1	1	60,476	0,22	0	0,0176	0,32	5,85	1,872	0,0150
					3,2	1	57,168	0,14	0,01	0,0123				
					3,3	0	56,283	0	0,15	0,0106				
min	0,03	1			3,4	1	72,138	0,19	0	0,0126				
max		10			3,5	1	5,156	0,05	0,02	0,0612				
4	0,32	4	1,28	5	4,1	1	16,300	0,26	0	0,0204	0,038	3,34	0,12825	0,0096
					4,2	0	58,864	0,07	0,08	0,0027				
					4,6	1	33,800	0,1	0,2	0,0089				
					4,7	1	23,000	0,2	0	0,0111				
					4,8	0	10,000	0	0,16	0,0153				
					4,3	1	20,878	0,15	0,02	0,0099				
min	0,03	1			4,4	0	75,145	0,04	0,12	0,0021				
max	0,33	10			4,5	1	25,616	0,17	0	0,0084				
max			6,96	5		сума	837,212					max	2,0097	0,1520
сума			19,79	5		15	410,316					сума	4,9774	0,2624
			виділено				700,0			зниження ризику %			71,125	

Зауважимо, що звісно, можуть виявитися такі ситуації, коли за певних умов розв'язків у задач не існуватиме. Або бракуватиме коштів, або заходи, які пропонуються, не зможуть забезпечити зниження професійного ризику хоча б по одному небезпечному чиннику. У такому випадку потрібно ретельно виявити додаткові можливості і розробити відповідні запобіжні заходи.

Таблиця 6.14 Мінімізація кількості заходів з додатковими заходами

Небезпека/небезпечна подія/наслідки	Ймовірність настання небезпечної події	Ступень тяжкості наслідків небезпечної події	Професійний ризик від небезпеки - і з урахуванням НЧ - і	граничний ризик	захід (i,m)	вибір заходу по зниженню ПР	Витрати на запобіжні і захисні заходи	доля зниження вірогідності небезпеки	доля зниження тяжкості	Ймовірність настання небезпечної події	Ступень тяжкості наслідків небезпечної події	Професійний ризик після проведення заходу	ефективність
1	0,87	8	6,96	5	1,1	0	9,997	0,05	0	0,2349	5,9	1,38591	0,05133
					1,2	1	18,638	0,1	0,05				
					1,8	1	20,000	0,2	0,15				
					1,3	0	52,279	0	0,2				
					1,4	1	13,819	0,15	0				
					1,5	1	50,830	0,08	0,1				
min	0,03	1			1,6	1	5,304	0,2	0				
max		10			1,7	0	11,690	0	0,1				
2	0,75	9	6,75	5	2,1	1	71,634	0,27	0,01	0,03	8,68	0,2604	0,0572
					2,2	0	26,397	0,38	0,05				
min	0,03	1			2,3	1	30,173	0,43	0,03				
max		10			2,4	1	11,626	0,47	0				
3	0,8	6	4,8	5	3,1	1	60,476	0,22	0	0,36	5,95	2,142	0,01400
					3,2	1	57,168	0,14	0,01				
					3,3	0	56,283	0	0,15				
min	0,03	1			3,4	1	72,138	0,19	0				
max		10			3,5	0	5,156	0,05	0,02				
4	0,32	4	1,28	5	4,1	0	16,300	0,26	0	0,288	3,4	0,9792	0,00889
					4,2	0	58,864	0,07	0,08				
					4,6	1	33,800	0,1	0,2				
					4,7	0	23,000	0,2	0				
					4,8	0	10,000	0	0,16				
					4,3	0	20,878	0,15	0,02				
min	0,03	1			4,4	0	75,145	0,04	0,12				
max	0,33	10			4,5	0	25,616	0,17	0				
max			6,96	5		сума	837,212				max	2,142	0,05721
сума			19,79	5		12	445,607					4,7675	0,131444
							700,0	зниження ризику %		69,224			

6.3. Висновки за розділом VI

1. Для вивчення механізму виникнення і розвитку небажаних подій в системах екстреної логістики під час перевезення пасажирів запропоновано зображувати транспортний процес у вигляді FRAM-діаграми, а дослідження сукупного впливу різних факторів техногенного, природного та соціального походження на сам процес проводити на основі феноменологічної моделі. В транспортному процесі ПАП виділено п'ять основних функцій, і розроблена методика кількісного оцінювання їх мінливості, викликаной зміною вказаних параметрів. Запропоновані критерії оцінювання відхилення параметрів від

нормативних величин і методика визначення пріоритетності складових характеристик кожної базової функції, що дозволяє виявляти потенційний функціональний резонанс, коли транспортний процес не зможе здійснюватися в нормальному режимі роботи через зміну певних його умов.

2. Результати розрахунків мінливості процесу ПП для різних сценаріїв дозволяють зробити висновок про те, що впровадження додаткового дистанційного контролю над певними діями або учасниками транспортного процесу може суттєво покращити результат виконання завдання. При цьому ризик виникнення інциденту зменшується на 15-20%.

3. Запропоновані заходи, які дозволяють зменшення ризику небезпек, зокрема, підвищити безпеку дорожнього руху, здійснюючи контроль психофізіологічного стану водія протягом всього маршруту: кермо зі будованими датчиками, що контролюють тиск і серцебиття водія, мобільні системи контролю міміки обличчя водія, миготіння очей; раціональний розподіл ресурсів і техніки, складання оптимальних розкладів; контроль за станом ґрунту на територіях техногенезу, удосконалення засобів індивідуального захисту.

4. Розроблено математичні моделі оптимального вибору сукупності запобіжних або захисних заходів, які дозволяють знизити рівень професійного ризику до прийнятних норм, за критеріями мінімізація витрат, максимізації ефективності вкладення коштів, та мінімізація кількості заходів. Показано, що ефективність витрат на запобіжні заходи може зрости на 30% –99%, а самі витрати зменшитися на 8% – 25% у порівнянні з ефективністю мінімальної кількості заходів, що дозволяють досягти допустимого рівня ризику. Результати розв’язання задач з критеріями мінімізації витрат і максимізації їх ефективності відрізняються незначно – до 23,5% за показником ефективності витрат і до 21% у витратах. Розробка додаткових економічних (більш дієвих) заходів може значно покращити показники оптимальності вибору комплексу дій щодо зниження професійного ризику на підприємствах.

ВИСНОВКИ

В дисертації вирішено важливу науково-прикладну проблему розробки ефективних математичних моделей процесів розподілу матеріальних ресурсів в транспортно-логістичних системах в умовах техногенних надзвичайних ситуацій, вдосконалення на їх основі методів та засобів математичного та комп'ютерного моделювання раціонального територіального розміщення елементів систем екстреної логістики.

Згідно із поставленою метою, в дисертаційній роботі вирішено наступні завдання та отримано відповідні наукові та практичні результати:

1. Проведено аналіз моделей, методів та інформаційних технологій, які використовуються для вирішення завдань, пов'язаних з плануванням та прийняттям рішень щодо управління логістичними процесами в районах техногенних надзвичайних ситуацій. Обґрунтовано актуальність розробки математичного забезпечення та інформаційних технологій територіального розподілу елементів систем екстреної логістики.

2. Вперше розроблено нові математичні моделі зонування території у вигляді задач оптимального мультиплексного розбиття континуальних множин, які, на відміну від відомих моделей, дозволяють розподіляти споживачів послуг за критеріями мінімізації відстані до декількох найближчих центрів із врахуванням їх можливостей, відображають спільне обслуговування мережею центрів споживачів, неперервно розподілених на певній території. Розроблено методи розв'язання нових задач.

3. Вперше розроблено математичні моделі і методи розв'язання задач оптимального розміщення підрозділів систем екстреної логістики, які забезпечують обґрунтованість вибору місця розташування нових об'єктів на базі існуючих об'єктів, а також розподіл навантаження на всі структурні елементи системи. Моделі можливо узагальнювати на випадок реструктуризації систем екстреної логістики, коли певна кількість її підрозділів реформується.

4. Розроблено і теоретично обґрунтовано математичні моделі задач оптимального розподілення матеріальних потоків в ієрархічних системах екстреної логістики у вигляді задач оптимального розбиття континуальної множини з розміщенням центрів підмножин та додатковими зв'язками. На відміну від раніше представлених моделей задач ОРМДЗ, критерій оптимальності розглянутих в дисертації задач включає не лише транспортні, але й фіксовані організаційні витрати, і містить коефіцієнти зваженості складових функціоналу, що надає можливість досліджувати і оптимізувати розподільчі процеси з урахуванням нагальних потреб і наявних засобів.

5. Розроблені нові математичні моделі процесу частково-двоетапного розподілу матеріальних ресурсів в багаторівневих логістичних системах на основі задач оптимального мультиплексного розбиття множин, які враховують напрям руху матеріальних потоків, обмежені потужності логістичних центрів, витрати на їх організацію, що відкриває перспективу комплексно розв'язувати задачі розміщення об'єктів систем екстреної логістики і розподілу ресурсів в процесі їх транспортування, посилюючи синергетичний ефект прийняття управлінських рішень в таких системах. На модельних прикладах двоетапних задач логістики доведено, що за рахунок використання розробленого математичного і алгоритмічного забезпечення досягнуто зниження до 20% сукупних витрат, які пов'язані з управлінням матеріальними потоками.

6. Запропоновано узагальнення моделей і методів розв'язання неперервних задач оптимального багатократного кульового покриття територій із урахуванням властивостей множин, на яких розміщуються центри куль, які утворюють покриття, що надає можливість вирішувати складні проблеми розміщення-розподілу і підвищувати оперативність та обґрунтованість прийняття рішень щодо організації і функціонування підрозділів систем екстреної логістики.

7. Обґрунтовано універсальність зазначених моделей за рахунок їх використання для визначення розподілу транспортних потоків, враховуючи

організацію збірних, проміжних і приймальних центрів логістики, розраховуючи відповідну інтенсивність матеріальних ресурсів з існуючих складів через розподільчі центри в райони надзвичайних ситуацій або з них.

8. Розроблено багатофункціональний програмний продукт для комп'ютерного моделювання розміщення об'єктів із зонуванням територій в системах екстреної логістики, використовуючи моделі та методи оптимального мультиплексного розбиття множин і багатоетапних задач розміщення-розподілу із залученням сучасних геоінформаційних технологій, що дозволяє планувати завчасні соціально-економічні та організаційно-технічні заходи, спрямовані на підвищення техногенної безпеки, зокрема на підприємствах гірничо-металургійної галузі.

9. Використовуючи метод FRAM створено модель транспортного процесу, запропоновано методику оцінювання функціональних її елементів, що дозволяє досліджувати сукупний вплив техногенних, природних та соціальних факторів на транспортний процес, розробити рекомендації щодо запобігання небажаних подій. Зокрема, для пасажирських автомобільних перевезень показано, що впровадження додаткового дистанційного контролю над певними діями або учасниками транспортного процесу знижує ризик виникнення інциденту на 15-20%. Запропоновані заходи, які дозволяють зменшити ризик небезпек.

10. Розроблено математичні моделі оптимального вибору сукупності запобіжних/захисних заходів, які дозволяють знизити рівень професійного ризику до прийнятних норм за критеріями мінімізація витрат, максимізації ефективності вкладення коштів та мінімізація кількості заходів. Показано, що ефективність витрат на заходи може зрости на 30% – 99%, а самі витрати зменшитися на 8% – 25% у порівнянні з ефективністю і кошторисом мінімальної кількості заходів, що дозволяють досягти допустимого рівня професійного ризику.

Складено методики оптимального розподілу матеріальних потоків між підрозділами багатоетапного виробництва, раціонального вибору місць

розташування логістичних об'єктів на випадок техногенних аварій, рекомендації щодо розробки науково-освітньої платформи для розв'язання актуальних проблем у сфері логістики, які впроваджено в навчальний процес НТУ «Дніпровська політехніка» МОН України, в Інституті геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України, Придніпровському науковому центрі НАН України і МОН України, ТОВ «Шахтостроймонтаж», ТОВ «Донбассшахтопроект».

Розробленим програмним продуктом можна користуватися при вирішенні проблем, пов'язаних із стратегічним плануванням у виробничій, соціальній, економічній сферах людської діяльності, зокрема:

- при створенні територіально-розподілених компаній з повним циклом виробництва, заготовлюючи, використовуючи й переробляючи сировину, випускаючи продукцію і транспортуючи її до кінцевих споживачів;
- для визначення необхідної кількості сил і засобів, розробки стратегії і тактики надання допомоги населенню регіону на випадок НС;
- для оперативного реагування на надзвичайні ситуації, розподілу ресурсів підпорядкованих підрозділів систем екстреної логістики.

Доцільність використання на практиці розроблених моделей та методів підтверджено результатами обчислювальних експериментів та впровадженням на підприємствах: Інститут геотехнічної механіки ім. М.С.Полякова (економічний ефект склав 163,4 тис. грн); Придніпровський науковий центр НАН України та МОН України (економічний ефект у обсязі 215,5 тис. грн); ТОВ «Шахтостроймонтаж» (з економічним ефектом у 364,5 тис. грн); ТОВ «Донбассшахтпроект».

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] ЗВІТ *про основні результати діяльності Державної служби України з надзвичайних ситуацій у 2019 році* [Електронний ресурс] / Доступно: https://www.kmu.gov.ua/storage/app/sites/1/17-civik-2018/zvit_2019/zvit-2019-dsns.pdf. Дата звернення: 15.02.2020.
- [2] ЗВІТ *про основні результати діяльності Державної служби України з надзвичайних ситуацій у 2021 році* [Електронний ресурс] / Доступно: <https://www.kmu.gov.ua/storage/app/sites/1/17-civik-2018/zvit2021/zvit2021-dns.pdf>. Дата звернення: 22.05.2022.
- [3] *Стан техногенної та природної безпеки в Україні*. Офіційний сайт ДСНС України. [Електронний ресурс] / Доступно: URL: <https://www.dsns.gov.ua>. Дата звернення: 22.05.2022.
- [4] V.M. Komyak, A.N.Sobol, A.N. Danilin, V.V. Komyak and K. T. Kyazimov, «Optimization of Partitioning the Domain into Subdomains According to Given Limitation of Space,» *Journal of Automation and Information Sciences*, vol. 52(2), P. 13–26, 2020.
- [5] H. Abdelgawad and B. Abdulhai, «Emergency evacuation planning as a network design problem: a critical review,» *Transportation Letters*, vol. 1(1), P. 41–58, 2013. [Online]. Available: <https://doi.org/10.3328/TL.2009.01.01.41-58>.
- [6] T.N. Dhamala, «A survey on models and algorithms for discrete evacuation planning network problems,» *Journal of industrial and management optimization*, vol. 11(1), P. 265–289, 2015. [Online]. Available: <https://doi.org/10.3934/jimo.2015.11.265>.
- [7] L. Qin, W. Xu, X. Zhao and Y. Ma, «Typhoon track change-based emergency shelter location-allocation model: a case study of Wenchang in Hainan province, China,» *Inj Prev.*, vol. 26(3), P. 196–203. Jun. 2020. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1136/injuryprev-2018-043081>.
- [8] X. Zhao, G. Coates and X. Wei, «A hierarchical mathematical model of the earthquake shelter location-allocation problem solved using an interleaved

- MPSO–GA,» *Geomatics, Natural Hazards and Risk*, vol. 10(1), P. 1712–1737, 2019. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1080/19475705.2019.1609605>.
- [9] Y. Hong, D. Li, Q. Wu and H. Xu, «Dynamic Route Network Planning Problem for Emergency Evacuation in Restricted-Space Scenarios,» *Journal of Advanced Transportation. Hindawi Journal of Advanced Transportation*, vol. 2018, Article ID 4295419, 13 pages. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1155/2018/4295419>.
- [10] L. Han, C. Gong, L. Gu, H. Qiao, A. Zhang and M. Liu, «A Multi-Zone Staged Indoor Emergency Evacuation Algorithm Based on Time Equalization,» *ISPRS Int. J. Geo-Inf.*, vol. 10, 499, Jul. 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.3390/ijgi10080499>.
- [11] L. Jin, M. Xiang, S. Chen, X. Zheng, R. Yao and Y. Chen, «An Orderly Untangling Model against Arching Effect in Emergency Evacuation Based on Equilibrium Partition of Crowd,» *Discrete Dynamics in Nature and Society*, vol. 2017, Article ID 2757939, 7 pages, 2017. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1155/2017/2757939>.
- [12] L. Ozdamar and Ertem M. Alp, «Models, solutions and enabling technologies in humanitarian logistics,» *European Journal of Operational Research*, vol. 244, no.1, P. 55–65, 2015.
- [13] I.M. Hezam and Mk. Nayeem, «A Systematic Literature Review on Mathematical Models of Humanitarian Logistics,» *Symmetry*, vol. 13(1):11, 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.3390/sym13010011>.
- [14] V. Bayram and H. Yaman, «Shelter location and evacuation route assignment under uncertainty: a benders decomposition approach,» *Transportation Science*, vol. 52(2), P. 416–436, 2018. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1287/trsc.2017.0762>.
- [15] A. Moreno, D. Alem, D. Ferreira and A. Clark, «An effective two-stage stochastic multi-trip location-transportation model with social concerns in relief supply chains,» *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 269, P. 1050–1071, 2018. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.02.022>.

- [16] V. Bayram and H. Yaman, «A stochastic programming approach for Shelter location and evacuation planning,» *RAIRO Oper. Res.*, vol. 52, P. 779–805, 2018. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1051/ro/2017046>.
- [17] O.B. Kınay, B.Y. Kara, F. Saldanha-da-Gama and I. Correia, «Modelling the shelter site location problem using chance constraints: a case study for Istanbul,» *European Journal of Operational Research*, vol. 270(1), P. 132–145, 2018. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.03.006>.
- [18] М.В. Новожилова, Р.В. Гудак та О.І. Чуб, «Оцінка ефективності засобів ліквідації надзвичайної ситуації природного характеру методами нечіткої логіки,» *Комунальне господарство міст*, том 1, вип. 154, С. 126–132, 2020. doi: 10.33042/2522-1809-2020-1-154-126-132.
- [19] D. Sarma, U.K. Bera and A. Das, «A mathematical model for resource allocation in emergency situations with the co-operation of NGOs under uncertainty,» *Comput. Ind. Eng.*, 137, (2019).
- [20] L. Shen, F. Tao, Y. Shi and R. Qin, «Optimization of Location-Routing Problem in Emergency Logistics Considering Carbon Emissions,» *International Journal of Environmental Research and Public Health.*, 16(16): 2982, 2019. [Online]. Available: <https://doi.org/10.3390/ijerph16162982>.
- [21] S.H. Kim, K.J. Li and H.G. Cho, «A Flexible Framework for Covering and Partitioning Problems in Indoor Spaces,» *ISPRS Int. J. Geo-Inf.*, 9, 618, 2020. [Online]. Available: <https://doi.org/10.3390/ijgi9110618>.
- [22] M.K. Oksuz and S.I. Satoglu, «A two-stage stochastic model for location planning of temporary medical centers for disaster response,» *Int. J. Disaster Risk Reduct.*, vol. 44, 101426, 2020. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.ijdrr.2019.101426>.
- [23] X. Hong, M.A. Lejeune and N. Noyan, «Stochastic network design for disaster preparedness,» *IIE Trans. Institute Ind. Eng.*, vol. 47, P. 329–357. 2015. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1080/0740817X.2014.919044>.
- [24] M. Yahyaei and A. Bozorgi-Amiri, «Robust reliable humanitarian relief network design: An integration of shelter and supply facility location,» *Ann.*

- Oper. Res.*, vol. 283, P. 897–916, 2019. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/s10479-018-2758-6>.
- [25] C. Boonmee, M. Arimura and T. Asada, «Facility location optimization model for emergency humanitarian logistics,» *Int. J. Disaster Risk Reduct.*, vol. 24, P. 485–498, 2017. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.ijdr.2017.01.017>.
- [26] M. Mostajabdaveh, W.J. Gutjahr and F.S. Salman, «Inequityaverse shelter location for disaster preparedness,» *IISE Transactions*, 51:8, P. 809–829, 2019. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1080/24725854.2018.1496372>.
- [27] M. Farahani, S. K. Chaharsooghi, T. V. Woensel and L. P. Veelenturf, «Capacitated network-flow approach to the evacuation-location problem,» *Computers & Industrial Engineering*, vol. 115, P. 407–426, 2018. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2017.11.026>.
- [28] H. Wang, L. Du and S. Ma, «Multi-objective open location-routing model with split delivery for optimized relief distribution in post-earthquake,» *Transp. Res. Part E Logist. Transp. Rev.*, vol. 69, P. 160–179, 2014. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.tre.2014.06.006>.
- [29] N.A. Theeb and C. Murray, «Vehicle routing and resource distribution in postdisaster humanitarian relief operations,» *Int. Trans. Oper. Res.*, vol. 24, P. 1253–1284, 2017. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1111/itor.12308>.
- [30] S. Bretschneider and A. Kimms, «Pattern-based evacuation planning for urban areas,» *European Journal of Operational Research, Elsevier*, vol. 216(1), 1, P. 57–69, Jan. 2012. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2011.07.015>.
- [31] A. Bozorgi-Amiri and M. Khorsi, «A dynamic multi-objective location–routing model for relief logistic planning under uncertainty on demand, travel time, and cost parameters,» *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, vol. 85, P. 1633–1648, 2016. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/s00170-015-7923-3>.
- [32] S. Bretschneider and A. Kimms, «A basic mathematical model for evacuation problems in urban areas,» *Transportation Research Part A: Policy and*

- Practice, Elsevier*, vol. 45(6), 523-539, 2011. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.tra.2011.03.008>.
- [33] A.W.A. Hammad, «A Bilevel Multiobjective Optimisation Approach for Solving the Evacuation Location Assignment Problem,» *Advances in Civil Engineering*, vol. 2019, Article ID 6052931, 11 pages, 2019. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1155/2019/6052931>.
- [34] В. Тютюник, О. Ященко, І. Рубан та О. Тютюнник, «Особливості функціонування системи ситуаційних центрів на різних стадіях розвитку надзвичайних ситуацій,» *Сучасні інформаційні технології у сфері безпеки та оборони*, № 1 (43), С. 41–52, 2022. [Online]. Available: <https://doi.org/10.33099/2311-7249/2022-43-1-41-52>.
- [35] B. Liang, D. Yang, X. Qin and T. Tinta, «A Risk-Averse Shelter Location and Evacuation Routing Assignment Problem in an Uncertain Environment,» *Int J Environ Res Public Health*, vol. 16(20):4007, Oct. 2019. [Online]. Available: [doi:10.3390/ijerph16204007](https://doi.org/10.3390/ijerph16204007).
- [36] H. Baharmand, T. Comes and M. Luras, «Bi-objective multi-layer location–allocation model for the immediate aftermath of sudden-onset disasters,» *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 2019. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.tre.2019.05.002>.
- [37] P. Praneetpholkrang, V. Huynh and S. Kanjanawattana, «A multi-objective optimization model for shelter location-allocation in response to humanitarian relief logistics,» *The Asian Journal of Shipping and Logistics*, 2021.
- [38] *Геоінформаційна система попередження надзвичайних ситуацій*. [Електронний ресурс]. Доступно: <https://magneticonemt.com/m1gis-geoinformatsijna-sistema-poperedzhennya-nadzvichajnih-situatsij>.
- [39] А. В. Орещенко, «Створення довідково-аналітичної геоінформаційної системи природних і техногенних надзвичайних ситуацій,» *Економічна та соціальна географія*, № 2, С. 297–305, 2014. [Електронний ресурс]. Доступно: http://nbuv.gov.ua/UJRN/esg_2014_2_39.

- [40] С. О. Ємельяненко, Ю. І. Рудик та Т. Є. Рак, «Геоінформаційний портал як платформа для візуалізації та оцінювання пожежних ризиків у житловому секторі,» *Пожежна безпека*, № 30, С. 83–90, 2017. [Електронний ресурс]. Доступно: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Pb_2017_30_11.
- [41] ViCTS: A novel network partition algorithm for scalable agent-based modeling of mass evacuation, *Computers Environment and Urban Systems*, 80(1287):101452, Mar. 2020. doi: 10.1016/j.compenvurbsys.2019.101452.
- [42] Y. Shi, G. Zhai, L. Xu, Q. Zhu and J. Deng, «Planning Emergency Shelters for Urban Disasters: A Multi-Level Location–Allocation Modeling Approach,» *Sustainability*, 11(16):4285, 2019. [Online]. Available: <https://doi.org/10.3390/su11164285>.
- [43] W. Chen, G. Zhai, C. Ren, Y. Shi and J. Zhang, «Urban Resources Selection and Allocation for Emergency Shelters: In a Multi-Hazard Environment,» *Int J Environ Res Public Health*, vol. 15(6):1261, Jun. 2018. doi:10.3390/ijerph15061261.
- [44] M. Rahman, N. Chen, M.M. Islam, A. Dewan, H.R. Pourghasemi, R.M.A. Washakh, N. Nepal, S. Tian, H. Faiz, M. Alam and N. Ahmed, «Location-allocation modeling for emergency evacuation planning with GIS and remote sensing: A case study of Northeast Bangladesh,» [J]. *Geoscience Frontiers*, 12(3):101095, 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.gsf.2020.09.022>.
- [45] P. Miç, M. Koyuncu and J. Hallak, «Primary Health Care Center (PHCC) Location-Allocation with Multi-Objective Modelling: A Case Study in Idleb, Syria,» *International journal of environmental research and public health*, vol. 16(5), 811, 2019. [Online]. Available: <https://doi.org/10.3390/ijerph16050811>.
- [46] A. Abdelkarim, «Integration of Location-Allocation and Accessibility Models in GIS to Improve Urban Planning for Health Services in AlMadinah Al-Munawwarah, Saudi Arabia,» *Journal of Geographic Information System*, 11, 633-662, 2019. [Online]. Available: <https://doi.org/10.4236/jgis.2019.116039>.
- [47] B. Kar and M.E. Hodgson, «A GIS-Based Model to Determine Site Suitability of Emergency Evacuation Shelters,» *Transactions in GIS*, vol. 12, no. 2, P.

- 227–248, Apr. 2008. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1111/j.1467-9671.2008.01097.x>.
- [48] А.Л. Казаков, А.А. Лемперт та Д.С. Бухаров, «К вопросу о сегментации логистических зон для обслуживания непрерывно распределенных потребителей,» *Автоматика и телемеханика*, № 6, С. 87–100, 2013.
- [49] I. Lee, C. Torpelund-Bruin and K. Lee, «Map segmentation for geospatial data mining through generalized higher-order Voronoi diagrams with sequential scan algorithms,» *Expert Systems with Applications*, vol. 39, Issue 12, P. 11135–11148, 2012.
- [50] M. Qi, M. Xia, Y. Zhang and L. Miao, «Competitive facility location problem with foresight considering service distance limitations,» *Computers and Industrial Engineering*, vol. 112, P. 483–491, 2017. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2017.04.024>.
- [51] J.S. Jeong and Á.A. Ramírez-Gómez, «Multicriteria GIS-Based Assessment to Optimize Biomass Facility Sites with Parallel Environment – A Case Study in Spain,» *Energies*, 10(12), 2095, 2017. [Online]. Available: <https://doi.org/10.3390/en10122095>.
- [52] W. Gu, X. Wang and L. Geng, «GIS-FLSolution: A Spatial Analysis Platform for Static and Transportation Facility Location Allocation Problem,» in: *Foundations of Intelligent Systems. ISMIS 2009. Lecture Notes in Computer Science*, 5722. Rauch J., Raś Z.W., Berka P., Elomaa T. (eds) Springer, Berlin, Heidelberg, 2009. [Online]. Available: https://doi.org/10.1007/978-3-642-04125-9_48.
- [53] Jeremy North and Fred L. Miller, «Facility location using GIS enriched demographic and lifestyle data for a traveling entertainment troupe in Bavaria, Germany,» *Decision Support Systems*, 99, P. 30–36, 2017. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.dss.2017.05.007>
- [54] A. Comber, J. Dickie, C. Jarvis, M. Phillips and K. Tansey, «Locating bioenergy facilities using a modified GIS-based location–allocation–algorithm: Considering the spatial distribution of resource supply,» *Applied*

- Energy*, vol. 154, P. 309–316, 2015. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2015.04.128>
- [55] Y. Xue, Z. Wen, X. Ji, H. Th. A. Bressers and C. Zhang, «Location Optimization of Urban Mining Facilities with Maximal Covering Model in GIS: A Case of China,» *Journal of Industrial Ecology*, vol. 21, Issue 4, P. 913–923, 2016. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1111/jiec.12467>
- [56] J.D. Zuluaga, D.A. Escobar and C. Younes, «A GIS approach based on user location to evaluate a bike-sharing program,» *DYNA*, vol. 85(204), P. 257–263, 2018.
- [57] K. Oguro and K. Hirakata, «Study on Optimal Location of Long-term Care Facilities— Under the Conditions of a Depopulating and Super-aging Society, with Use of GIS (geographical information system) Data: A case example of Niigata City,» *Policy Research Institute, Ministry of Finance, Japan, Public Policy Review*, vol. 14, Issue 1, P. 53–79, 2018. [Online]. Available: https://www.mof.go.jp/english/pri/publication/pp_review/fy2017/ppr14_01_03.pdf.
- [58] Xue Jianga, Jusheng Songa, Yaoyu Lina and Yongxi Gong, «A practical approach to constructing hierarchical networks for urban hazard mitigation planning using GIS: The case of Futian, Shenzhen,» *International Journal of Disaster Risk Reduction*, vol. 28, P. 629–639, 2018. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.ijdrr.2018.01.014>.
- [59] Md. Mohib-Ul-Haque Khan, Mahdi Vaezi and Amit Kumar, «Optimal siting of solid waste-to-value-added facilities through a GIS-based assessment,» *Science of The Total Environment*, 610 – 611, 1, P. 1065–1075, 2018. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2017.08.169>.
- [60] Y. Dudko, D.E. Robey, E. Kruger and M. Tennant, «Selecting a location for a primary healthcare facility: combining a mathematical approach with a Geographic Information System to rank areas of relative need,» *Australian Journal of Primary Health*, vol. 24(2), P. 130–134, 2018. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1071/PY17093>.

- [61] Арон Д.В., Волков А.Д., Дьяков С.В. и Зарянов А.В. «Моделирование зон аварийного планирования защитных мероприятий при радиационной аварии на данных по территории префектуры Фукусима,» *Радиация и риск*, том 29, № 1, С. 140–153, 2020. doi: 10.21870/0131-3878-2020-29-1-140-153.
- [62] H. Seraji, R. Tavakkoli-Moghaddam and R. Soltani, «A two-stage mathematical model for evacuation planning and relief logistics in a response phase,» *Journal of Industrial and Systems Engineering*, 12, P. 129–146, 2019.
- [63] J. Geng, H. Hou and S. Geng, «Optimization of Warehouse Location and Supplies Allocation for Emergency Rescue under Joint Government–Enterprise Cooperation Considering Disaster Victims’ Distress Perception,» *Sustainability*, vol. 13, 10560, 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.3390/su131910560>.
- [64] F. Haghpanah and H. Foroughi, «Optimal Shelter Location-Allocation during Evacuation with Uncertainties: A Scenario-Based Approach,» arXiv:1802.05775, *Optimization and Control*, 2018.
- [65] X. Zhao, W. Xu, Y. Ma and F. Hu, «Scenario-Based Multi-Objective Optimum Allocation Model for Earthquake Emergency Shelters Using a Modified Particle Swarm Optimization Algorithm: A Case Study in Chaoyang District, Beijing, China,» *PLoS One*, 10(12): e0144455, Dec. 2015. [Online]. Available: doi: 10.1371/journal.pone.0144455.
- [66] Kavroudakis, D., Christos, K., and Panagiotis, T. (2019). «Location-Allocation Modeling for Emergency Evacuations in the Aegean Sea,» In: Stratigea, A., Kavroudakis, D. (eds) *Mediterranean Cities and Island Communities*. Progress in IS. Springer, Cham. [Online]. Available: https://doi.org/10.1007/978-3-319-99444-4_11.
- [67] Xiujuan Zhao, Jianguo Chen, Wei Xu, Shiyan Lou, Peng Du, Hongyong Yuan and Kuai Peng Ip. «A Three-Stage Hierarchical Model for An Earthquake Shelter Location-Allocation Problem: Case Study of Chaoyang District,

- Beijing, China,» *Sustainability, MDPI*, vol. 11(17), pages 1-18, Aug. 2019. doi:10.3390/su11174561.
- [68] A.O. Дашкевич, «Метод розташування точок на площині із урахуванням їх взаємної досяжності,» *Вісник Національного технічного університету "ХІІІ"*, № 1 (5), С. 69–75, 2021. DOI: 10.20998/2411-0558.2021.01.05.
- [69] W. Jing and K. Shimada, «Model-based view planning for building inspection and surveillance using voxel dilation, medial objects, and random-key genetic algorithm,» *Journal of Computational Design and Engineering*, vol. 5, no. 3, P. 337–347, 2018.
- [70] M.-L. Xu, H. Jiang and X.-G. Jin, «Crowd simulation and its applications: recent advances,» *Journal of Computer Science and Technology*, vol. 29, no. 5, P. 799–811, 2014.
- [71] W. Wang, B. Tang, X. Fan, [et al.] «Efficient visibility analysis for massive observers,» *Procedia Computer Science*, vol. 111, P. 120–128, 2017.
- [72] A. Darvishan and Gino J. Lim, «Dynamic network flow optimization for real-time evacuation reroute planning under multiple road disruptions,» *Reliability Engineering and System Safety, Elsevier*, vol. 214(C), 2021. doi: 10.1016/j.ress.2021.107644.
- [73] S. Kamishetty and P. Paruchuri, «Towards a Better Management of Emergency Evacuation using Pareto Min Cost Max Flow Approach,» in *Proceedings of the 6th International Conference on Vehicle Technology and Intelligent Transport Systems (VEHITS 2020)*, P. 237–244, 2020. [Online]. Available: <https://doi.org/10.5220/0009395302370244>.
- [74] G. Gupta and P. Paruchuri, «Effect of human behavior on traffic patterns during an emergency,» in *IEEE 19th International Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)*, 2052–2058, 2016. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1109/ITSC.2016.7795888>.
- [75] S.-J. Yoo and S.-H. Choi, «Indoor AR Navigation and Emergency Evacuation System Based on Machine Learning and IoT Technologies,» in *IEEE Internet*

- of Things Journal*, vol. 9, no. 21, P. 20853–20868, Nov. 2022. doi: 10.1109/JIOT.2022.3175677.
- [76] D.A. Muhammed, T.A. Rashid, A. Alsadoon, N. Bacanin, P. Fattah, M. Mohammadi and I. Banerjee, «An Improved Simulation Model for Pedestrian Crowd Evacuation,» *Mathematics*, 8(12):2171, 2020. [Online]. Available: <https://doi.org/10.3390/math8122171>.
- [77] А. І. Івануса, С. О. Ємельяненко, Є. В. Морщ, «Методи та моделі безпеко-орієнтованого управління зацікавленими сторонами проектів у системі цивільного захисту,» *Вісник Львівського державного університету безпеки життєдіяльності*, № 19, С. 36–43, 2019. [Online]. Доступно: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Vldubzh_2019_19_5.
- [78] R.L. Francis, «Sufficient conditions for some optimum – property facility design,» *Oper. Res.*, vol. 15, № 3, P. 448–466, 1967.
- [79] H.W. Corley and S.D. Roberts, Duality relationships a partitioning problem,» *SIAM. J. Appl. Math.*, vol. 23, № 4, P. 490–494, 1972.
- [80] E. Balas and M.W. Padberg, «Set partitioning: a survey,» *Comb. Optimiz. Lect. summer Sch. Comb. Optimiz. urbino*, 1977, Chichester e.a. 1979, P. 151 – 210, 1977.
- [81] O. Kariv and S.L. Hakimi, «An algorithmic approach to network location problems: Part 1, The p-Centers; Part 2, The p-Medians,» *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 37, P. 513–560, 1979.
- [82] N. Megiddo and K.J. Supowit, «On the complexity of some common geometric location-problems,» *SIAM Journal on Computing*, vol. 13, P. 182–196, 1984.
- [83] E. M. Kiseleva «An algorithm for solving the problem of optimal partitioning under constraints,» *Cybernetics*, vol. 19, no. 1, P. 115–120, 1983.
- [84] J. Current, H. Min and D. Schilling, «Multiobjective analysis of facility location decisions,» *European Journal of Operational Research*, 49, P. 295–307, 1990.

- [85] T. Drezner and Z. Drezner, «Replacing continuous demand with discrete demand in a competitive location model,» *Naval Research Logistics*, vol. 44, P. 81–95, 1997.
- [86] C.Y. Wang, C.Y. Gao and Z.J. Shi, «An algorithm for continuous type optimal location problem,» *Computational Optimization and Applications*, vol. 7, P. 239–253, 1997.
- [87] Bast, H., and Hert, S. «The Area Partitioning Problem,» 12th *Canadian Conference on Computational Geometry*. CCCG 2000, Fredericton, New Brunswick, P. 163–171, 2000.
- [88] A. Dasci and V. Verter, «A continuous model for production-distribution system design,» *European Journal of Operational Research*, vol.129, P. 287–298, 2001.
- [89] S.Durocher, *Geometric Facility Location under Continuous Motion. Bounded-Velocity Approximations to the Mobile Euclidean k-Centre and k-Median Problems*. The University of British Columbia, 2006.
- [90] A. Murat, V. Verter and G. Laporte, «A Continuous Analysis Framework for the Solution of Location-Allocation Problems with Dense Demand,» *Les Cahiers du GERAD*, G , 42 pp., 2008.
- [91] R.Z. Farahani and M. Hekmatfar, *Facility location. Concepts, models, algorithms and case studies*, Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, 2009.
- [92] S. Ansari, M. Basdere, X.S. Li, Y. Ouyang and K.R. Smilowitz, «Advancements in continuous approximation models for logistics and transportation systems: 1996–2016,» *Transportation Research Part B-methodological*, 107, 229–252, 2017.
- [93] L. Mallozzi, J. Puerto and M. Rodríguez-Madrena, «On Location-Allocation Problems for Dimensional Facilities,» *J Optim Theory Appl*, 182, P. 730–767, 2019. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/s10957-018-01470-y>.
- [94] Е.М. Киселева и Н.З. Шор, *Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения*, К.: Наукова думка, 2005.

- [95] Е.М. Киселева и Л.С. Коряшкина, *Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств: линейные, нелинейные, динамические задачи*, К.: Наукова думка, 2013.
- [96] E.M. Kiseleva and L.S. Koriashkina, «Theory of Continuous Optimal Set Partitioning Problems as a Universal Mathematical Formalism for Constructing Voronoi Diagrams and Their Generalizations. I. Theoretical Foundations,» *Cybernetics and Systems Analysis*, vol. 51, Issue 3, P. 325–335, May 2015.
- [97] S.A. Us and O.D. Stanina, «Mathematical models of Multi-stage problems of locating production,» *Collected Scientific Papers on Problems of Applied Mathematics and Mathematical Modeling*. Dnipropetrovsk: Oles Honchar Dnipropetrovsk National University, P. 258–268, 2014.
- [98] E.M. Kiseleva and V.A. Stroyeva, «Algorithm of solving of nonlinear continuous multicomponent problem of optimal set partitioning with placement of subsets centers,» *Journal of Automation and Information Sciences*, vol. 44, Issue. 2, P. 15–29, 2012.
- [99] L. Cooper, «Location-Allocation problems,» *Oper Res.*, vol. 11, Issue 3, P. 331–343, 1963.
- [100] M.A. Badri, «Combining the analytic hierarchy process and goal programming for global facility location-allocation problem,» *Int J Prod Econ.*, 99, vol. 62, P. 237–248, 1999.
- [101] R.L. Church and C.S. Revelle, «The maximal covering location problem,» *Papers of the Regional Science Association*, 32, P. 101–118, 1974.
- [102] R.L. Francis, L.F. McGinnis and J.A. White, *Facility layout and location: An analytical approach*. N.J.: Prentice Hall, Englewood Cliffs. 1992.
- [103] M.V. Novozhylova, I.A. Chub, Y.V. Mikhaylovskaya and R.V. Gudak, «Solving the problem of covering the need in resources in the emergency liquidation,» *Radioelektronika i informatika*, 1, P. 121–125, 2019.

- [104] Е.В. Алексеева и Ю.А. Кочетов, «Генетический локальный поиск для задачи о р–медиане с предпочтениями клиентов,» *Дискретный анализ и исследование операций*, Серия 2, Том 14, № 1, С. 3 – 31, 2007.
- [105] Н. Taha, *Transportation model and its variants* (Operation research 8th ed.), Prentice Hall, 2006.
- [106] Moreno, J., Rodriguez, C., and Jimenez, N. «Heuristic cluster algorithm for multiple facility location – allocation problem,» *Operations research*. Vol. 25, No 1. pp. 97–107. (1991).
- [107] E. Erkut, R.L. Francis and A. Tamir, «Distance-constrained multifacility minimax location problems on tree network,» *Networks*, vol. 22, P. 37–54, 1992.
- [108] N.Z. Shor, N.G. Zhurbenko, A.P. Likhovid and P.I. Stetsyuk, «Algorithms of Nondifferentiable Optimization: Development and Application,» *Cybernetics and Systems Analysis*, vol. 39(4), P. 537–548, Jun. 2003.
- [109] Е.М. Киселева и Л.С. Коряшкина, *Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств и r-алгоритмы*, К.: Наук. думка, 2015.
- [110] Л.С. Коряшкіна, «Розширення одного класу нескінченновимірних оптимізаційних задач,» *Вісн. Черкаського ун-ту. Сер. Прикл. матем. Інф.*, № 18(351), С.28–36, 2015.
- [111] Е.М. Киселева и Л.С. Коряшкина, «Применение r-алгоритма Шора для решения непрерывных задач многократного покрытия,» *Modelare matematica optimizare si tehnologii informationale*, Materialele conferintei internationale, Chisinau, С. 234-245, 25-28 martie, 2014.
- [112] E.M. Kiseleva and L.S. Koriashkina, «On solving and properties of the simplest dynamical problem of optimal set partition problem,» *Journal of Automation and Information Sciences*, vol. 45, Issue 6, P. 1–12, 2013.
- [113] E.M. Kiseleva, L.S. Koriashkina and T.A. Shevchenko, «On dynamical problem of optimal set partition with integral constraints,» *Journal of Automation and Information Sciences*. vol. 45, Issue 7, P. 41–53, 2013.

- [114] E.M. Kiseleva, L.S. Koriashkina and T.A. Shevchenko, «Solving the Dynamic Optimal Set Partitioning Problem with Arrangement of Centers of Subsets,» *Cybernetics and Systems Analysis*, vol. 50, Issue 6, P. 842–853, 2014.
- [115] Л.С. Коряшкина и А.П. Череватенко, «Условия оптимальности для задачи оптимального разбиения множеств с подвижными границами между подмножествами,» *Вісник Запорізького національного університету*, № 2, С. 73 – 81, 2014.
- [116] L.S. Koriashkina, A. Pravdivy and A.P. Cherevatenko, «One way to solve problems of multi-zone dynamics models identification,» *Power Engineering, Control & Information Technologies in Geotechnical Systems*, CRC Press Balkema - Taylor & Francis Group, P. 153–160, 2015.
- [117] Л. С. Коряшкина и А.П. Череватенко, «Задача параметричної ідентифікації багатозонних динамічних систем,» *Системные технологии*, № 4 (99), С. 88–101, 2015.
- [118] О.М. Кісельова, Л.С. Коряшкіна и Т.О. Шевченко, «Напрямки розвитку динамічних задач оптимального розбиття множин,» *Системний аналіз та інформаційні технології: матеріали 12-ї Міжнародної науково-технічної конференції SAIT 2010*, Київ, / ННК “ІПСА” НТУУ “КПІ”. К.: ННК “ІПСА” НТУУ “КПІ”, 2010, С. 98, 25–29 травня 2010.
- [119] Л.С. Коряшкина, О.В. Зайченко и А.В. Правдивый, «Нелинейные динамические задачи оптимального разбиения множеств и их приложения,» *Системний аналіз та інформаційні технології: матеріали 15-ї Міжнародної науково-технічної конференції SAIT 2013*, Київ, / ННК “ІПСА” НТУУ “КПІ”. К.: ННК “ІПСА” НТУУ “КПІ”, 2013, С. 118, 27–31 травня 2013.
- [120] И.В. Сергиенко, В.С. Дейнека, Е.М. Киселева и Л.С. Коряшкина, «Применение методов оптимального разбиения множеств для решения геометрических обратных задач теплопроводности,» *Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии*.

Материалы 3-й международной конференции– Кишинэу, 19-23 марта 2012.

- [121] Л.С. Коряшкина и А.П. Череватенко, «Об одной непрерывной нелинейной динамической задаче оптимального разбиения множества,» *Modelare matematica optimizare si tehnologii informationale*, Materialele conferintei internationale, Chisinau, С. 268–272, 25–28 martie 2014.
- [122] Л.С. Коряшкина и А.П. Череватенко, «Необходимые и достаточные условия оптимальности для непрерывной динамической задачи оптимального разбиения множеств,» *Системний аналіз і інформаційні технології*. Тези доповідей Міжнародної науково-практичної конференції– Київ, С. 114, 26–30 травня 2014.
- [123] Л.С. Коряшкина и А.П. Череватенко, «Про один підхід щодо розв’язання задачі ідентифікації багатозонної динамічної моделі,» *VII Міжнародна наукова конференція «Обчислювальна та прикладна математика» імені академіка І. І. Ляшка*, м. Київ, Україна: Матеріали конференції. Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, С. 57–58, 9–10 жовтня 2014.
- [124] F.P. Preparata and M.I. Shamos, *Computational Geometry: An Introduction (Texts and Monographs in Computer Science)*. Springer-Verlag New York, Inc. New York, NY, USA, 1985.
- [125] O. Blyuss, L. Koriashkina, E. Kiseleva and R. Molchanov, «Optimal placement of irradiation sources in the planning of radiotherapy: mathematical models and methods of solution,» *The Scientific World Journal*, vol. 2015, 17 p., 2015.
- [126] О.Б. Блюсс, Л.С. Коряшкина и Н. Гранкина, «Об алгоритмах решения задачи оптимизации размещения и поля действия конечного числа источников в непрерывной среде,» *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. Збірник наук. праць. Дніпропетровськ, С. 10–21, 2014.

- [127] Л.С. Коряшкіна, А.П. Череватенко та К. О. Коряшкіна, «Інтеграція ГІС-технологій і методів розв'язання неперервних задач оптимального мультиплексного розбиття множин,» *Системні дослідження та інформаційні технології*, № 4, С. 97–108, 2017. [Online]. Available: <https://doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2017.4.08>.
- [128] Л.С. Коряшкіна, Н.Н. Одновол, А.П. Череватенко и А.А. Михалёва, «Моделирование зон сервисного обслуживания на заданной территории,» *Вісник Херсонського національного технічного університету*, Херсон: ХНТУ, вип. 3(62), Т. 2, С.109–117, 2017.
- [129] Л.С. Коряшкіна и А.П. Череватенко, «О критериях качества в непрерывных задачах оптимального разбиения множеств,» *Математичне і програмне забезпечення інтелектуальних систем: Матеріали ХІ міжнародної науково-практичної конференції*. Дніпропетровськ, С. 127–128, 20 – 22 листопада 2013.
- [130] О.О. Михальова та Л.С. Коряшкіна, «Задачі оптимального багатократного кульового покриття та мультиплексне розбиття множин,» *Зб. наук. праць ХХІ Всеукраїнської наук. конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (АРАМС – 2015)*, Львов: ЛНУ ім. І. Франка, 2015, С. 189–190, 24–25 вересня 2015.
- [131] О.Б. Блюсс, Л.С. Коряшкіна та Н. Гранкіна, «Применение r-алгоритма Шора для решения непрерывных задач оптимизации размещения и поля действия источников в ограниченной области,» *Математичне і програмне забезпечення інтелектуальних систем: Матеріали ХІІ міжнародної науково-практичної конференції*. Дніпропетровськ, С. 22–24, 20 – 22 листопада 2013.
- [132] Е.М. Киселева, Л. С. Коряшкіна, «Об оптимальных диаграммах Вороного для ограниченного множества и методах их построения,» *Математичне і програмне забезпечення інтелектуальних систем: Матеріали ХІІ міжнародної науково-практичної конференції*, Дніпропетровськ, 20 – 22 листопада 2014 р., С. 105–106, 2014.

- [133] Е. М. Киселева, Л. С. Коряшкина и С. А. Ус, *Теория оптимального разбиения множеств в задачах распознавания образов, анализа и идентификации систем: монография*, М-во образования и науки Украины, ГВНЗ "Нац. горн. ун-т". Днепропетровск : НГУ, 2015.
- [134] N. Christofides *Graph Theory – An Algorithmic Approach*, New York: Academic Press, 1975.
- [135] L. Koriashkina, A. Cherevatenko and O. Mykhalova, «The continuous problems of the optimal multiplex partitioning an application of sets,» *Power Engineering and Information Technologies in Technical Objects Control*, Pivnyak, Beshta & Alekseyev (eds). Taylor & Francis Group, London, P. 233–239, 2016.
- [136] L. Koriashkina, S. Us, M. Odnovol, O. Stanina and S. Dziuba, «Two-stage problems of optimal location and distribution of the humanitarian logistics system's structural subdivisions,» 2023.
- [137] Л.С. Коряшкина, «Обобщение одного класса задач бесконечномерного математического программирования,» *Математичне та імітаційне моделювання систем. МОДС 2015: тези допов. Десятої міжнар. наук.-практ. конф.*, 22–26 червня 2015 р. Чернігів: ЧНТУ, С. 160–164, 2015.
- [138] Л.С. Коряшкіна та А.П. Череватенко «Про критерії якості в неперервних задачах оптимального розбиття множин,» *Математичне і програмне забезпечення інтелектуальних систем: Матеріали XI міжнародної науково-практичної конференції*, 20 – 22 листопада 2013 р. Дніпропетровськ, С. 127 – 128, 2013.
- [139] F.Aurenhammer, «Voronoi diagrams – a survey of a fundamental geometric data structure,» *ACM Computing Surveys.*, vol. 23, P. 345–405, 1991.
- [140] Н.З. Шор, *Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложение*, К.: Наук. думка.
- [141] Н.З. Шор и С.И. Стеценко, *Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация*, К.: Наук. думка, 1989.

- [142] Л.С. Коряшкина и А.П. Череватенко, Свідоцтво 64326 Україна про реєстрацію авторського права на твір Комп'ютерна програма "OPTIMAL MULTIPLEX-PARTITIONING OF SETS" (OMPS-2015) [Текст] (Україна). № 64838; заявлено 31.12.15; зареєстровано 01.03.16 в Державному реєстрі свідоцтв про реєстрацію авторського права на твір.
- [143] Ф.П. Васильев, *Методы оптимизации*, М.: Факториал пресс, 2002.
- [144] Л.С. Коряшкина и А.П. Череватенко, «Оптимальные диаграммы Вороного высших порядков ограниченных множеств и алгоритмы их построения,» *Вісник Черкаського університету. Серія Прикладна математика. Інформатика*, №. 1–2, С. 59–76, 2016.
- [145] E.M. Kiseleva and L.S. Koriashkina, «The Theory of Continuous Optimal Set Partitioning Problems as a Universal Mathematical Formalism for Constructing the Voronoi Diagram and its Generalizations. II. Algorithms for constructing Voronoi Diagrams based on the theory of optimal partitioning of sets,» *Cybernetics and Systems Analysis*, vol. 51, Issue 4, P. 3–12, 2015.
- [146] Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина и А. А. Михалева, «Диаграмма Вороного и ее обобщения как результат решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств,» *Математичне і програмне забезпечення інтелектуальних систем: Матеріали ХІ міжнародної науково-практичної конференції. Дніпропетровськ, С. 102–103, Листопад 2013.*
- [147] Л.С. Коряшкина и А.П. Череватенко, «Оптимальные диаграммы Вороного высших порядков ограниченных множеств и алгоритмы их построения,» *Математичне та імітаційне моделювання систем. МОДС 2016 : тези доповідей Одинадцятій міжнародної науково-практичної конференції (Жукин, 27 червня - 1 липня 2016 р.) / М-во осв. і наук. України, Нац. Акад. наук України, Академія техно-логічних наук України, Інженерна академія України та ін. Чернігів: ЧНТУ, С. 332–334, 2016.*

- [148] L. Koriashkina, A. Cherevatenko and O. Mykhalova, «The continuous problems of the optimal multiplex partitioning an application of sets,» *Power Engineering and Information Technologies in Technical Objects Control*, Pivnyak, Beshta & Alekseyev (eds). Taylor & Francis Group, London, P. 233–239, 2016.
- [149] Л. Коряшкіна, М. Сазонова та М. Одновол, «Алгоритми територіальної сегментації для мережі сервісних центрів з перекриттям зон обслуговування,» *Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security*, № 2, 2023.
- [150] Л.С. Коряшкіна та С.В. Дзюба, «Перерозподіл навантаження в системі екстреної логістики за рахунок оптимального розміщення її нових підрозділів,» *Міжнародна науково-практична конференція «Сучасні тенденції та перспективи розвитку науки, освіти та суспільства»*, м. Орхус, Данія, 10 серпня 2023.
- [151] S.V. Dziuba, L.S. Koriashkina and D. Kruglikov, «Mathematical support of information technology for the resource distribution in logistics systems,» *Information technologies and applications (IT&Is)*, November 21, 2023. – P. 63 – 64.
- [152] Л.С. Коряшкіна и А.П. Череватенко, «Моделирование зон сервисного обслуживания на заданной территории,» *Проблеми інформатики та моделювання (ПІМ-2017). Тезиси сімнадцятої міжнародної науково-технічної конференції*. Харків: НТУ "ХПІ", С. 43, 2017.
- [153] Л.С. Коряшкіна и А.П. Череватенко, «Метод решения непрерывной линейной задачи оптимального мультиплексного разбиения множеств с ограничениями,» *Сб. трудов Второй Всеукраинской науч.-технич. конф. "Информатика, управление и искусственный интеллект (ИУИИ-2015)"*, 26–27 ноября 2015 г. Харьков : НТУ "ХПИ", С. 39, 2015.
- [154] Л.С. Коряшкіна и А.П. Череватенко, «Об одном подходе к территориальной сегментации рынка услуг,» *Современные информационные и коммуникационные технологии на транспорте, в*

промышленности и образовании: сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф., 16 – 17 декабря 2015 г. Дн-ск: ДНУЖТ им. В.А. Лазаряна, С. 81, 2015.

- [155] Л.С. Коряшкина и А.П. Череватенко, «Про розв'язання неперервних задач оптимального мультиплексного розбиття множин з обмеженнями,» *Зб. наук. праць XXI Всеукраїнської наук. конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (APAMCS – 2015),* 24 – 25 вересня 2015 р. Львов: ЛНУ ім. І. Франка, С. 189–190, 2015.
- [156] Л. Коряшкіна, М.Сазонова та М. Одновол, «Алгоритми територіальної сегментації для мережі сервісних центрів з перекриттям зон обслуговування,» *Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security*, № 2, 2023.
- [157] L.S. Koriashkina and A.P. Cherevatenko, «Continuous problems of optimal multiplex-partitioning of sets without constraints and solving methods,» *Journal of Computational and Applied Mathematics*, № 2 (119), P. 15–32, 2015.
- [158] Л.С. Коряшкина и А.П. Череватенко, «Непрерывные линейные задачи оптимального мультиплексного разбиения множеств с ограничениями,» / Л.С. Коряшкина, А.П. Череватенко // *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, Серія «Мат. моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»,* 2015. – Вип. 28. – С. 77 – 91.
- [159] Krieg, H., Seidel, T., Schwientek, J. et al. (2022) «Solving continuous set covering problems by means of semi-infinite optimization,» *Math Meth Oper Res.* <https://doi.org/10.1007/s00186-022-00776-y>
- [160] Л. С. Коряшкіна та О. Р. Беляєв, «Визначення оптимальної кількості та місць розміщення зарядних станцій для електромобілів на території міста,» *Комп'ютерне моделювання: аналіз, управління, оптимізація*, № 1, С. 23–29, 2019.

- [161] С. Н. Астраков и А. И. Ерзин, «Построение эффективных моделей покрытия при мониторинге протяженных объектов,» *Вычислительные технологии*, Т. 17, № 1, С. 26–34, 2012.
- [162] Ш.И. Галиев, «Направление убывания для минимаксиминных задач. *Журн. Вычисл. Матем. и матем. физ.*, Т. 34, № 3, С. 323–343, 1994.
- [163] N. Gupta, N. Kumar and S. Jain, «Coverage problem in wireless sensor networks: A survey,» *2016 International Conference on Signal Processing, Communication, Power and Embedded System (SCOPES)*. Paralakhemundi, India, P. 1742–1749, 2016.
- [164] D.V. Aron, A.D. Volkov, S.V. Dyakov and A.V. Zaryanov, «Modeling of emergency zones for protective actions planning in case of radiation emergency based on relevant data related to the Fukushima Prefecture,» *Radiaciya i risk*, vol. 29, no 1, pp. 140–153, 2020.
- [165] H.A.E. Essa, Y.M.A. El-Latif, S.M. Ali, et al., «A New Approximation Algorithm for k-Set Cover Problem,» *Arab J Sci Eng.*, 41, P. 935–940, 2016. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/s13369-015-1895-3>.
- [166] Mercedes Pelegrín, Liding Xu «Continuous Covering on Networks: Strong Mixed Integer Programming Formulations,» arXiv:2203.00284v2. [Online]. Available: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2203.00284>.
- [167] E. Balas and M. C. Carrera, «A dynamic subgradient-based branch-and-bound procedure for set covering,» *Operations Research*, 44 (1996), 875-890. doi: 10.1287/opre.44.6.875.
- [168] F. Antonio Medrano, «The complete vertex p-centre problem,» *EURO Journal on Computational Optimization*, 8:323–327, 2020. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/s13675-020-00131-y>.
- [169] Ш. И. Галиев и М. А. Карпова, «Оптимизация многократного покрытия ограниченного множества кругами,» *Журнал вычисл. математики и матем. физики*, Т. 50, № 4, С. 757–769, 2010.

- [170] Zhan, ZH., Shi, L., Tan, K.C. et al. «A survey on evolutionary computation for complex continuous optimization,» *Artif Intell Rev* 55, 59–110 (2022). [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/s10462-021-10042-y>
- [171] Helene Krieg, Tobias Seidel, Jan Schwientek and Karl-Heinz Küfer, «Solving continuous set covering problems by means of semi-infinite optimization,» *Mathematical Methods of Operations Research, Springer; Gesellschaft für Operations Research (GOR); Nederlands Genootschap voor Besliskunde (NGB)*, vol. 96(1), P. 39-82, Aug. 2022. doi: 10.1007/s00186-022-00776-y.
- [172] С. Н. Астраков, А. И. Ерзин и В. В. Залюбовский, «Сенсорные сети и покрытие плоскости кругами,» *Дискретный анализ и исследование операций*, Т. 16, № 3, С. 3–19, 2009.
- [173] T. Tarnai and Zs. Gaspar, «Covering a square by equal circles,» *Elem. Math.*, vol. 50, P. 167–170, 1995.
- [174] О. М. Кисельова і Л. І. Лозовська, «Про моделювання неперервних задач багатократного кулькового покриття множини,» *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. Д.: ДНУ, С.174–180, 2013.
- [175] Коряшкина, Л.С., Михалева, А.А., Навоенко, В.И. «Применение методов оптимального разбиения множеств к непрерывным задачам многократного покрытия,» *Питання прикладної математики і математичного моделювання*, с. 148 – 161, 2014.
- [176] Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина та А.А. Михалева, «Применение методов оптимального разбиения множеств при решении непрерывных задач многократного покрытия,» *Тези доповідей Міжнародної науково-практичної конференції «Інформаційні технології та математичне моделювання»*, Днепропетровск, С. 41–154, 2014.
- [177] Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина, А. А. Михалева и В.И. Навоенко, «Об одном подходе к развязанию непрерывных задач многократного покрытия,» *Тези доповідей Міжнародної науково-практичної конференції «Системний аналіз і інформаційні технології»*, Київ, С. 102, 26 – 30 травня 2014.

- [178] Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина и А. А. Михалева, «Конструктивные алгоритмы розв'язання непрерывных задач многократного покрытия,» *Системні технології*. Дніпропетровськ, Вып. 4 (93), С. 3–16, 2014.
- [179] Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина и А. А. Михалева, «О выборе направления спуска в задачах минимизации радиуса многократного покрытия множества из пространства E_n ,» *Математичне і програмне забезпечення інтелектуальних систем*: Матеріали XII міжнародної науково-практичної конференції. Дніпропетровськ, С. 107–109, 19 – 21 листопада 2014.
- [180] Е.М. Киселева та Л.С. Коряшкина, «Применение r -алгоритма Шора для решения непрерывных задач многократного покрытия,» *Материалы 5-й международной конференции Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии*. Кишинэу, С. 459–467, 26–30 марта 2014.
- [181] Н. З. Шор и П. И. Стецюк, «Использование модификации r – алгоритма для нахождения мінімуму полиномиальных функций,» *Кибернетика и системный анализ*, № 4, С. 28–49, 1997.
- [182] О.О. Михальова, «Про зв'язок задач оптимізації багатократного кульового покриття обмежених множин та їх мультиплексного розбиття,» *Комп'ютерні технології*. Львів: ЛНУ, С. 504–506, 2015.
- [183] Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина и А. А. Михалева, «Непрерывная задача многократного кульового покрытия с ограничениями и метод ее решения,» *Системні технології*. Дніпропетровськ, №1, С. 165–179, 2015.
- [184] Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина та А. А. Михалева, «О решении непрерывной задачи оптимального многократного кульового покрытия с ограничениями,» *Тези доповідей Міжнародної науково-практичної конференції «Інформаційні технології в металургії та машинобудуванні»*, Дніпропетровск, 2015.
- [185] Л.С. Коряшкина и А.А. Михалева, «Непрерывная задача многократного мінімального кульового покрытия с «регуляризацией» функционала,»

Тези доповідей Міжнародної наукової школи-семінару «Вопросы оптимизации вычислений», 21 – 25 вересня 2015.

- [186] Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкіна, А. А. Михалева и А.А. Гаврюшов, «Многократное шаровое покрытие областей со сложными границами,» *Тези доповідей Міжнародної науково-практичної конференції «Ноосфера-2015», С. 102 – 103, 2015.*
- [187] Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкіна и А.А. Михалева, «Оптимальное многократное шаровое покрытие невыпуклых областей,» *Питання прикладної математики і математичного моделювання. Збірник наук. праць. Дніпропетровськ, С. 107–115, 2015.*
- [188] В.Л. Рвачев, *Теория R-функций и некоторые её приложения*, Киев: Наук. думка, 1982.
- [189] Пункт 21 із змінами, внесеними згідно з *Постановою КМ № 711 від 12.08.2020.*
- [190] Абзац перший пункту 24 із змінами, внесеними згідно з *Постановою КМ № 905 від 30.11.2016.*
- [191] A. Bulat, S. Dziuba, S. Minieiev, L. Koriashkina and S. Us, «Solution of the problem to optimize two-stage allocation of the material flows,» / // *Mining of Mineral Deposits*, vol. 14, Issue 1, P. 27–35, 2020.
- [192] B. Blyuss, L. Koriashkina, S. Us, S. Minieiev and S. Dziuba, «An optimal two-stage distribution of material flow at the fuel and energy complex enterprises,» *E3S Web of Conferences*, 109, 00008, 2019.
- [193] Станіна О.Д., Ус С.А., Коряшкіна Л.С. Моделі та методи розв'язання задач розміщення двоетапного виробництва з неперервно розподіленим ресурсом: Монографія / Дніпро, ви-ць «Свідлер А.Л.», 2021. – 200 с.
- [194] Us S. A., Koriashkina L. S., Stanina O. D. «An optimal two-stage allocation of material flows in a transport-logistic system with continuously distributed resource *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2019, Issue 1, P. 256–268, [Online]. Available: <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2019-1-24>

- [195] Дзюба С.В., Коряшкіна Л.С. «Обґрунтування механізму управління логістичними потоками промислових підприємств,» *Потураївські читання: матеріали міжнародної наук.-практ. Конф., м. Дніпро, 2020, Дніпро, НТУ Дніпровська політехніка, 18.*
- [196] Міщенко М.І., Коряшкіна Л.С., Ус С.А., Дзюба С.В. «Оптимізація логістичних зв'язків в системі двоетапного транспортування ресурсу, неперервно розподіленого на заданій території,» *Транспортний комплекс України: Умови ефективного розвитку: матеріали VII Всеукр. Наук.-практ. Конф. М. Одеса, 2019, 31–33.*
- [197] B. Blyuss, L. Koriashkina, S. Us, S. Minieiev, S. Dziuba, «An optimal two-stage distribution of material flow at the fuel and energy complex enterprises,» *E3S Web of Conferences*, 109 (2019), International Conference Essays of Mining Science and Practice, Dnipro, Ukraine, June 25-27, 2019, [Online]. Available: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/201910900008>
- [198] Ус С.А., Коряшкіна Л.С., Станіна О.Д. «Двоетапна неперервно-дискретна задача розподілу за наявністю фіксованих ланцюгів поставок,» *Міжнародний науковий сімпозум «Інтелектуальні рішення». Теорія прийняття рішень: праці міжнар. школи-семінару, 15-20 квітня 2019 р., Ужгород / М-во освіти і науки України, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», та [ін]; наук. ред. Л.Ф.Гуляницький // Ужгород. – 2019 – с. 125-126.*
- [199] Ус С.А., Коряшкіна Л.С., Станіна О.Д. «Моделирование и оптимизация двухэтапного транспортирования ресурса, непрерывно распределенного на заданной территории,» *Сучасні проблеми і досягнення в галузі радіотехніки, телекомунікацій та інформаційних технологій : Тези доповідей IX Міжнародної науково-практичної конференції (03–05 жовтня 2018 р., м. Запоріжжя) [Електронний ресурс] / Редкол. : Д. М. Піза, С. В. Морщавка. Електрон. дані. Запоріжжя : ЗНТУ, 1 електрон. опт. диск (DVD-ROM); 12 см. с. 269–271, 2018.*

- [200] D. Zelentsov, S. Us, L. Koryashkina and O. Stanina, «Solving Continual Two-Stage Problems of Optimal Partition of Sets,» *International Journal of Research Studies in Computer Science and Engineering*, (IJRSCSE), vol. 4, Issue 4, P. 72–80, 2017.
- [201] S. Dziuba, A. Bulat, L. Koriashkina and B. Blyuss, «Discrete-Continuous Model of the Optimal Location Problem for the Emergency Logistics System,» 2023. [Online]. Available: <https://ssrn.com/abstract=4401341>.
- [202] М. Фаулер, *NoSQL: нова методологія розробки нереляційних баз даних*, Дж. Садаладж, Диалектика-Вильямс, 2013.
- [203] Веб сторінка тарифних планів ГІС сервісу MapQuest [Online]. Available: <https://developer.mapquest.com/plans>.
- [204] Веб сторінка тарифних планів ГІС сервісу Google Distance Matrix API [Online]. Available: <https://developers.google.com/maps/pricing-and-plans/#details>
- [205] Л.С. Коряшкіна, О.О. Михальова, Б.Р. Свіріпа та А.П. Череватенко, «Інтерактивна карта оптимального мультиплексного розбиття заданого регіону,» *Збірник наукових праць Національного гірничого університету*, Нац.гірн.ун-т. Дніпро: Вид-во НГУ, № 55. С. 274–287, 2018.
- [206] L. Koriashkina, A. Mikhalova, B. Sviripa and A. Cherevatenko, «Interactive map of optimal multiplex-partitioning of a given region,» *Information control systems and technologies: materials of the VII international scientific-practical conference (17th - 18 th september 2018, Odessa) / response for the publ.: V.V. Vychuzhanin*. Odessa: astroprint, P. 236–239, 2018.
- [207] Л.С. Коряшкіна, А.П. Череватенко, Н.Н. Одновол та О.О. Міхальова «Моделювання зон сервісного обслуговування у заданому регіоні,» *XVIII Міжнародна конференція з математичного моделювання (МКММ-2017) [Збірка тез (18-22 вересня 2017 р., м. Херсон)]*. Херсон: ХНТУ, С. 20–21, 2017.
- [208] Л.С. Коряшкіна, «Інформаційна технологія територіальної сегментації в системах екстреної логістики,» *International scientific-practical*

conference “Modern trends and prospects for the development of science, education and society”: conference proceedings (Bila Tserkva, Ukraine, November 1, 2023). Bila Tserkva, Ukraine: Scholarly Publisher ICSSH, 2023, November 01, 2023 p. – P. 40 – 41, 2023.

- [209] Л.С. Коряшкина та А.П. Череватенко, «О программной реализации алгоритмов оптимального мультиплексного разбиения множеств совместно с ГИС-технологиями при решении задач сегментации рынка услуг,» *Современные информационные и коммуникационные технологии на транспорте, в промышленности и образовании*, 14 – 15 декабря 2016 г.: Материалы Международной научно-практической конференции. – Д.: ДНУЖДТ им. Лазаряна, С. 52–53, 2016.
- [210] S.E. Avramenko, T.A. Zheldak and L.S. Koriashkina, «Guided hybrid genetic algorithm for solving global optimization problems,» *Radio Electronics, Computer Science, Control*, № 2, P. 174–188, 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2021-2-18>.
- [211] O. Bazaluk, L. Koriashkina, S. Cheberyachko, O. Deryugin, M. Odnovol, V. Lozynskyi and O. Nesterova, «Functional Resonance Analysis Method for Incident Risk Assessment During Passenger Road Transportation,» *Heliyon*, vol. 8, Issue 11, e11814, 2022. doi: 10.1016/j.heliyon.2022.e11814.
- [212] В.А. Андронов, М.М. Дівізінюк, В.Д. Калугін та В.В. Тютюник, *Науково-конструкторські основи створення комплексної системи моніторингу надзвичайних ситуацій в Україні. Монографія*. Харків: Національний університет цивільного захисту України, 2016.
- [213] В.Д. Калугін, В.В. Тютюник, Л.Ф. Черногор та Р.І. Шевченко, «Розробка науково-технічних основ для створення системи моніторингу, попередження та ліквідації надзвичайних ситуацій природного та техногенного характеру та забезпечення екологічної безпеки,» *Системи обробки інформації*, Харків: Харківський університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, вип. 9(116), С. 204–216, 2013.

- [214] Yu.I. Cheberiachko, I.M.Cheberiachko, M.M.Odnovol, L.S.Koriashkina, «Developing a mathematical model of linkage parameters of air flow in a filter box,» *Scientific Bulletin of National Mining University*, № 3. P. 99–105, 2019.
- [215] L.S. Koriashkina, T.P. Mokritska, O.V. Bondar, M.M. Odnovol, “On the influence of the number of aggregates and free particles on the subsidence of loess soils,” *Scientific Bulletin of National Mining University*, № 5, P. 5–12, 2018.
- [216] *FRAM - the Functional Resonance Analysis Method for modelling non-trivial socio-technical systems*. Режим доступу: <https://functionalresonance.com/>
- [217] Фоменко, О.Я., Раціборський, Б.Л., Гусар, В.Є., Рудницький, В.А., Бойко, А.І. *Правила дорожнього руху України*. Київ: Укрспецвидав, 2014. – 112 с. ISBN 978-617-7174-02-7.
- [218] *Про затвердження Положення про робочий час і час відпочинку водіїв колісних транспортних засобів*: Наказ Міністерства транспорту та зв'язку України № 340 від 07.06.2010. Режим доступу: URL: <http://zakon3.rada.gov.ua/laws/show/z0811-10>
- [219] *Методичні рекомендації щодо облікової політики суб'єкта державного сектору*. Наказ Міністерства фінансів України від 23 січня 2015 р. № 11 // <https://zakon.rada.gov.ua/rada/show/v0011201-15>
- [220] *Гігієнічна класифікація умов праці*. Наказ Міністерство охорони здоров'я України № 248 від 08.04.2014 Про затвердження Державних санітарних норм та правил «Гігієнічна класифікація праці за показниками шкідливості та небезпечності факторів виробничого середовища, важкості та напруженості трудового процесу». Режим доступу: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z0472-14#Text>.
- [221] Khabarlak K.S., Koriashkina L.S. “Fast facial landmark detection and applications: A survey,” *Journal of Computer Science and Technology*, Vol. 22, № 1, P. 12-41, 2022. DOI: 10.24215/16666038.22.e02
- [222] Khabarlak K.S., Koriashkina L.S. “Scoping adversarial attack for improving its quality,” *Radio Electronics, Computer Science, Control*, № 2, P. 108-118, 2019. DOI: 10.15588/1607-3274-2019-2-12.

- [223] Koriashkina L.S., Cheberiachko S.I., Deryugin O.V., Odnovol M.M. “Rational organization of the work of an electric vehicle maintenance station,” *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*, № 14(1), P. 27-35, 2020.
- [224] Khabarлак K.S., Koriashkina L.S. “Mobile access control system based on RFID tags and facial information,” *Bulletin of National Technical University “KhPI”. Series: System Analysis, Control and Information Technologies*, Vol. 2, Nom. 4, P. 69-74. 2020. DOI: 10.20998/2079-0023.2020.02.12.

**ДОДАТОК А. МЕТОДИКИ РОЗРАХУНКІВ І РЕКОМЕНДАЦІЇ,
ЯКІ РОЗРОБЛЕНІ В ДИСЕРТАЦІЇ**

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет
«Дніпровська політехніка»
49005, м. Дніпро, пр. Д. Яворницького, 19;
Телефон/факс +38 (056) 744 62 19; E-mail: ntu@ntu.org.ua

ЗАТВЕРДЖУЮ
Перший проректор Національного
технічного університету «Дніпровська
політехніка» МОН України,
доктор технічних наук, професор

Артем ПАВЛИЧЕНКО



МЕТОДИКА

ОПТИМАЛЬНОГО РОЗМІЩЕННЯ ПІДРОЗДІЛІВ СИСТЕМИ ЕКСТРЕНОЇ
ЛОГІСТИКИ НА ВИПАДОК НАДЗВИЧАЙНИХ СИТУАЦІЙ

Завідувач кафедри системного
аналізу та управління,
канд. техн. наук, доцент

Тимур ЖЕЛІДАК

Доцент кафедри системного
аналізу та управління,
канд. фіз.-мат. наук, доцент

Лариса КОРЯШКІНА

Асистент кафедри системного
аналізу та управління,
канд. техн. наук, доцент

Ольга СТАНІНА

Дніпро

2021

РЕФЕРАТ

Методика: 17 стор., 6 джерел літератури, 2 додатки.

Об'єкт дослідження – двоетапні логістичні процеси екстреної евакуації, які виникають під час надання допомоги населенню територій, що зазнали шкоди від надзвичайної ситуації (НС) природного або техногенного характеру

Мета роботи – забезпечення раціональної організації транспортування мешканців постраждалого від НС регіону за рахунок максимального охоплення територій, що зазнали лиха, і мінімізації термінів евакуації.

Методи дослідження – системний аналіз, математичне моделювання, теорії неперервних задач оптимального розбиття множин, теорії двоїстості, методи розв'язання задач лінійного програмування транспортного типу.

Представлена модель, метод і алгоритм дозволяють вирішувати цілу низку практичних проблем, пов'язаних з розробкою запобіжних дій і планування рятувальних робіт для забезпечення безпеки населення у разі надзвичайних ситуацій. Отримані теоретичні результати можуть бути використані керівництвом установ під час вирішення логістичних задач, пов'язаних з організацією первинної евакуації населення з постраждалих територій та його подальшого перевезення до центрів надання подальшої допомоги.

Формулювання задачі оптимального розбиття множин з додатковими зв'язками як математичної моделі двоетапних оптимізаційних задач доцільно у разі, коли мешканців постраждалих територій велика кількість і вони щільно заповнюють ці території. Запропонована модель допомагає обґрунтовувати рішення про розташування на заданій території нових структурних підрозділів системи екстреної допомоги з урахуванням багатоетапних евакуаційних процесів. Крім того, модель є універсальною, оскільки її можна використовувати також для вивчення питань оптимального розміщення складів матеріально-технічних, продовольчих, медичних ресурсів, тобто місць зосередження матеріальних засобів і ресурсів в зоні НС; розгортання пунктів постачання й розподілу предметів першої необхідності, засобів індивідуального захисту тощо.

Прогнозні пропозиції про розвиток об'єкта дослідження – створення науково-технічних основ планування комплексу запобіжних заходів щодо попередження та ліквідації наслідків НС, підвищення рівня захищеності населення під час надзвичайної ситуації за рахунок оптимального розміщення рятувальних об'єктів і зонування території для вирішення проблем розподілення руху евакуації.

ЕКСТРЕНА ЛОГІСТИКА, ДВОЕТАПНА ЕВАКУАЦІЯ, ТЕРИТОРІАЛЬНЕ ЗОНУВАННЯ, СИСТЕМА ЦИВІЛЬНОГО ЗАХИСТУ, НЕПЕРЕРВНІ МОДЕЛІ ЗАДАЧІ РОЗМІЩЕННЯ-РОЗПОДІЛУ

Зміст

ВСТУП.....	4
1 Математичні моделі задач екстреної логістики	6
2 Універсальність запропонованих математичних моделей	9
3 Теоретичне обґрунтування методів розв’язання задач екстреної логістики	11
4 Чисельні алгоритми розв’язання задач екстреної логістики.....	14
Перелік посилань	17
ДОДАТОК А. Способи опису щільності населення регіону для розв’язання задач екстреної логістики	18
А.1 Теоретичний спосіб представлення густини населення регіону	18
А.2. Створення цифрової мапи щільності населення регіону	20
ДОДАТОК Б. Транспортна задача і метод потенціалів її розв’язання	34

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет
«Дніпровська політехніка»
49005, м. Дніпро, пр. Д. Яворницького, 19;
Телефон/факс +38 (056) 744 62 19; E-mail: nmu@nmu.org.ua

ЗАТВЕРДЖУЮ
Перший проректор Національного
технічного університету «Дніпровська
політехніка» МОН України,
доктор технічних наук, професор

Артем ПАВЛИЧЕНКО



МЕТОДИКА
РАЦІОНАЛЬНОГО ВИБОРУ МІСЦЬ РОЗМІЩЕННЯ РЯТУВАЛЬНИХ
СЛУЖБ НА ВИПАДОК ТЕХНОГЕННИХ АВАРІЙ

Завідувач кафедри системного
аналізу та управління,
канд. техн. наук, доцент

Тимур ЖЕЛДАК

Доцент кафедри системного
аналізу та управління,
канд. фіз.-мат. наук, доцент

Лариса КОРЯШКІНА

Доцент кафедри системного
аналізу та управління

Микола ОДНОВОЛ

Дніпро

2021

РЕФЕРАТ

Методика: 19 стор., 11 джерел літератури.

Об'єкт дослідження – заходи щодо завчасного запобігання і ліквідації наслідків потенційного стихійного лиха або техногенної катастрофи

Мета роботи – забезпечення раціональної організації роботи підрозділів системи аварійної допомоги за рахунок оптимального вибору місць розташування рятувальних служб і пунктів первинної допомоги, що дозволяє мінімізувати час надання допомоги постраждалим.

Методи дослідження – системний аналіз, математичне моделювання, методи дискретної та недиференційованої оптимізації, дослідження операцій.

Розглянуто задачу оптимального вибору місць розташування спеціалізованих підрозділів системи екстреної допомоги, а також зонування територій, які можуть постраждати під час можливого лиха, стихійного або спричиненого людиною. Актуальність роботи зумовлена необхідністю завчасної розробки комплексу запобіжних заходів щодо запобігання та ліквідації наслідків надзвичайних ситуацій.

Розроблена математична модель є задачею покриття неперервної множини колами та оптимального розміщення центрів куль на скінченному наборі можливих місць, що мінімізує відстань від центру до найвіддаленішої точки області. Крім того, модель узагальнена для врахування матеріальних витрат, пов'язаних з обладнанням, обслуговуванням або будівництвом об'єктів, оскільки ці витрати можуть бути різними для різних можливих місць розташування. Розроблено методику розв'язування моделі з використанням основ теорії неперервних задач оптимального покриття множини та комбінаторної оптимізації. Представлені модель, метод та алгоритм дозволяють вирішувати практичні задачі, пов'язані з розробкою профілактичних дій та плануванням рятувальних робіт для забезпечення безпеки населення у разі виникнення стихійного лиха або техногенної катастрофи.

Прогнозні пропозиції про розвиток об'єкта дослідження – підвищення ефективності реалізації програми створення та розвитку системи безпеки на об'єктах масового перебування людей, до яких відносяться захисні споруди, аварійно-рятувальні служби, центри первинної медичної допомоги тощо.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ, ЗОНИ ПІДПОРЯДКУВАННЯ, РОЗМІЩЕННЯ, РЯТУВАЛЬНІ СЛУЖБИ, СИСТЕМИ ЕКСТРЕНОЇ ЛОГІСТИКИ, БАГАТОКРАТНЕ ПОКРИТТЯ МНОЖИН, ГІС-ТЕХНОЛОГІЇ.

Зміст

ВСТУП.....	4
1 Задачі оптимального багатократного покриття множин і їх практичні застосування	5
2 Математичні моделі задач оптимального розміщення рятувальних служб і визначення зон їх відповідальності	6
3 Задачі про оптимальний вибір місць розташування рятувальних служб як окремий випадок задачі багатократного покриття множини	10
4 Ідея методу і алгоритм розв’язання задач оптимального вибору місць розташування рятувальних служб і визначення зон їх відповідальності	13
5 Приклади розв’язання задач оптимального вибору місць розміщення рятувальних служб і зонування територій	15
Перелік посилань	19
ДОДАТОК. Приклад використання ГІС для пошуку зон відповідальності об’єктів, випадково розташованих на деякій території, з багатократним її покриттям	20

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет
«Дніпровська політехніка»
49005, м. Дніпро, пр. Д. Яворницького, 19;
Телефон/факс +38 (056) 744 62 19; E-mail: ntm@ntmu.org.ua

ЗАТВЕРДЖУЮ



Перший проректор Національного
технічного університету «Дніпровська
політехніка» МОН України,
доктор технічних наук, професор

Артем ПАВЛИЧЕНКО

« 27 » грудня 2021 р.

РЕКОМЕНДАЦІЇ

ЩОДО ОПТИМАЛЬНОГО РОЗМІЩЕННЯ ПІДРОЗДІЛІВ ЛОГІСТИЧНИХ
СИСТЕМ ТА РОЗПОДІЛУ ЇХ НАВАНТАЖЕННЯ

Завідувач кафедри системного
аналізу та управління,
канд. техн. наук, доцент

Тимур ЖЕЛДАК

Доцент кафедри системного
аналізу та управління,
канд. фіз.-мат. наук, доцент

Лариса КОРЯШКІНА

Доцент кафедри системного
аналізу та управління

Микола ОДНОВОЛ

Дніпро

2021

Рекомендації розроблено в рамках науково-дослідної роботи «Задачі моделювання, оптимізації та прийняття рішень в складних системах різної природи», номер державної реєстрації 0121U109788.

1. Проблеми удосконалення або розширення функціонуючих логістичних систем

Розміщення сервісних або виробничих підприємств є класичною проблемою, яка передбачає залучення методів, що оперують з географічною інформацією, включають кількісну оцінку попиту та пропозиції, а також оптимальну організацію комунікаційних мереж. Традиційний аналіз таких задач орієнтований на максимізацію економічної та соціальної вигоди або (та) на мінімізацію транспортних витрат і задоволення попиту на товари та послуги. Це можуть бути довгострокові цілі зростання бізнесу, залучення певних сегментів клієнтів або продаж обмеженої кількості певного продукту. Економічні, демографічні та інфраструктурні умови змінюються у часі, і, отже, місця розташування структурних об'єктів створюваної мережі мають бути адекватно зважені за різними критеріями. Останні, у свою чергу, можуть бути агреговані в єдину цільову функцію (залежно від параметрів, що настраюються), що дозволяє визначити єдиний розв'язок задачі в термінах зважених карт відстаней, прив'язаних до цільової функції. Саме така ідея лежить в основі математичного опису задач оптимальної організації сервісних або виробничих мереж у вигляді неперервних задач оптимального розбиття множин [1 – 5].

В якості сервісних центрів розглядатимемо мережу центрів аварійного постачання існуючої системи екстреної логістики. При цьому під моделюванням зон їх обслуговування розумітимемо засновані на геометрії процедури створення теоретичних зон з використанням характеристик об'єкту та припущень про поведінку споживача. Такий підхід є корисним, коли дані про переваги споживачів відсутні, або їх отримання вимагає великої кількості часу або людських ресурсів. Такі моделі варто використовувати для прогнозування сервісних зон, для визначення потенційних місць розташування нових об'єктів, оцінювання впливу цих та інших змін на існуючій множині об'єктів.

Будемо вважати, що споживач вибирає k ($k = 1, 2, 3, \dots$) найближчих або найбільш привабливих з N існуючих центрів. Тоді отримані в результаті сегментації сервісні зони не будуть взаємовиключними і не визначатимуть просторові монополії.

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет
«Дніпровська політехніка»
49005, м. Дніпро, пр. Д. Яворницького, 19;
Телефон/факс +38 (056) 744 62 19; E-mail: nmu@nmu.org.ua

ЗАТВЕРДЖУЮ

Перший проректор Національного
технічного університету «Дніпровська
політехніка» МОН України,
доктор технічних наук, професор



Артем ПАВЛИЧЕНКО

Березня 2023 р.

**МЕТОДИКА
ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ МАТЕРІАЛЬНИХ ПОТОКІВ
МІЖ СТРУКТУРНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ БАГАТОЕТАПНОГО
ВИРОБНИЦТВА**

Завідувач кафедри системного
аналізу та управління,
канд. техн. наук, доцент

Тимур ЖЕЛДАК

Професор кафедри системного
аналізу та управління,
канд. фіз.-мат. наук, доцент

Світлана УС

Доцент кафедри системного
аналізу та управління,
канд. фіз.-мат. наук, доцент

Лариса КОРЯШКІНА

Дніпро

РЕФЕРАТ

Методика: 16 стор., 15 джерел літератури.

Об'єкт дослідження – багатоетапний процес розподілення матеріального потоку в транспортно-логістичній системі підприємств паливно-енергетичного комплексу або гірничо-металургійної галузі

Мета роботи – зниження транспортних та організаційних витрат за рахунок розробки і реалізації моделей і методів розв'язання багатоетапних оптимізаційних задач розміщення-розподілу.

Методи дослідження – системний аналіз, математичне моделювання, методи оптимізації і дослідження операцій.

Проаналізовано основні етапи виробництва, структурними елементами якого є шахти (центри першого етапу), які здійснюють видобуток вугілля, неперервно розподіленого на деякій території, і підприємства, які споживають або перероблюють вугілля (центри другого етапу). За кожною шахтою закріплюється територія (зона) видобутку. Рух сировини в системі здійснюється спочатку в напрямку від кожної точки зони безпосередньо до місця його накопичення на відповідній шахті, далі розсортований ресурс направляється в певних кількостях на підприємства-споживачі – теплоелектроцентралі (ТЕЦ), збагачувальні фабрики, металургійні виробництва, інші об'єкти.

Побудована математична модель задачі оптимізації процесів розміщення двоетапного виробництва, яка враховує неперервність розподілення сировини, наявні потужності підприємств. Розроблено і обґрунтовано метод її розв'язування, який засновано на зведенні вихідної задачі нескінченновимірної програмування, використовуючи апарат теорії двоїстості, до задачі пошуку умовного мінімуму функції скінченної кількості змінних і застосування до останньої методів штрафних функцій і недиференційованої оптимізації. Проведені експериментальні дослідження, аналіз отриманих результатів розв'язання модельних задач підтвердив дієвість і доцільність використання розробленої методики на практиці.

Прогнозні пропозиції про розвиток об'єкта дослідження – створення науково-технічних основ визначення обсягів і напрямку руху матеріальних потоків на підприємствах паливно-енергетичного комплексу, а також гірничо-металургійної галузі, що забезпечують надійність, екологічну безпеку і ресурсозбереження технологій видобутку, транспортування і переробки мінеральної сировини.

**МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ, ЗАДАЧА РОЗМІЩЕННЯ-РОЗПОДІЛУ,
БАГАТОЕТАПНИЙ ЛОГІСТИЧНИЙ ПРОЦЕС, ОПТИМІЗАЦІЯ,
МАТЕРІАЛЬНИЙ ПОТІК**

Зміст

ВСТУП.....	4
1 Побудова математичної моделі.....	6
2 Теоретичне обґрунтування методу розв'язання моделі	8
3 Чисельний алгоритм методу.....	9
4 Програмна реалізація алгоритму і приклад її роботи	11
Перелік посилань	15

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет
«Дніпровська політехніка»
49005, м. Дніпро, пр. Д. Яворницького, 19;
Телефон/факс +38 (056) 744 62 19; E-mail: ntm@ntmu.org.ua

ЗАТВЕРДЖУЮ

Перший проректор Національного
технічного університету «Дніпровська
політехніка» МОН України,
доктор технічних наук, професор



Артем ПАВЛИЧЕНКО

29 березня 2023р.

РЕКОМЕНДАЦІЇ

ЩОДО РОЗРОБКИ НАУКОВО-ОСВІТНЬОЇ ПЛАТФОРМИ
ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ АКТУАЛЬНИХ ЗАДАЧ У СФЕРІ ЛОГІСТИКИ,
У ТОМУ ЧИСЛІ ГУМАНІТАРНОЇ

Завідувач кафедри системного
аналізу та управління,
канд. техн. наук, доцент

Тимур ЖЕЛДАК

Доцент кафедри системного
аналізу та управління,
канд. фіз.-мат. наук, доцент

Лариса КОРЯШКІНА

Асистент кафедри системного
аналізу та управління

Костянтин ХАБАРЛАК

Рекомендації розроблено в рамках науково-дослідних робіт: «Розробка нових мобільних інформаційних технологій для ідентифікації особи та класифікації об'єктів навколишнього світу», номер державної реєстрації 0121U109787; «Задачі моделювання, оптимізації та прийняття рішень в складних системах різної природи», номер державної реєстрації 0121U109788.

1. Обґрунтування доцільності створення науково-освітньої платформи

Нині Україна зазнає потужних економічних та соціальних потрясінь. Бойові дії, пов'язані з ними техногенні аварії залишають відбиток на усіх галузях життєдіяльності людини, зокрема на транспортній інфраструктурі, магістралях, в будівельних фондах. Відновлення економічної активності підприємств, транспортно-логістичної інфраструктури на територіях, що зазнали пошкоджень або зовсім зруйновані, безсумнівно є необхідною умовою розвитку країни та її реінтеграції у світове господарство. З погляду людських жертв та економічних витрат величезний внесок у пом'якшення негативного впливу таких надзвичайних ситуацій робить гуманітарна логістика.

Транспортно-виробничі системи, в яких реалізуються логістичні процеси кругообігу матеріальних ресурсів, як правило, є досить ємними і складними. Вони можуть об'єднувати велику кількість господарчих суб'єктів і посередників, які у свою чергу, можуть бути розміщені в різних регіонах і на великих територіях, відрізнятися розмірами потреб у продуктах, багатьма іншими факторами. Логістика матеріальних потоків здійснюється не тільки в рамках одного самостійного підприємства, але й за його межами, в інших, подібних до нього або пов'язаних з ним структурах, а це визначає таку властивість транспортно-виробничих процесів, як їх багатоступінь. Планування, реалізація та контроль за ефективним, рентабельним потоком та зберіганням товарів та матеріалів, а також відповідної інформації, від точки походження до точки споживання вимагає від керівників підприємств і відповідальних осіб володіння компетенціями в галузі організації і управління поточними процесами. Відтак, створення науково-освітньої платформи для розв'язування різноманітних актуальних задач, які виникають у сфері логістики, у том числі і гуманітарної, є, безперечно, однією із складових сталого функціонування і розвитку країни.

2. Мета

Розробка науково-освітньої платформи для розв'язання актуальних проблем у сфері логістики, у тому числі і гуманітарної, яка б дозволила надати можливість відповідальним особам приймати обґрунтовані рішення про оптимальне розміщення структурних підрозділів корпорацій, організацію логістичних взаємозв'язків між різними об'єктами для відновлення регіону, постраждалого від надзвичайних ситуацій техногенного або соціального характеру, забезпечення сталого розвитку в країні в цілому і в промисловості зокрема.

3. Методи, методики та технології

Під час розробки платформи мають бути залучені теоретичні, емпіричні методи наукового пізнання, геоінформаційні системи і технології, методи математичного моделювання, системного аналізу, статистичного прогнозування, методи розв'язання задач оптимізації складних систем, теорії вибору і прийняття рішень, пов'язані з теоретичними та експериментальними дослідженнями у сфері логістики.

**ДОДАТОК Б. ДОКУМЕНТИ ПРО ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ
ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ**

ЗАТВЕРДЖУЮ

Перший проректор Національного
технічного університету «Дніпровська
політехніка» МОН України,
доктор технічних наук, професор



Артема АВДІЧЕНКО

03. 2023р.

АКТ

**про впровадження результатів науково-дослідної роботи в навчальний процес
Національного технічного університету «Дніпровська політехніка»**

Результати наукової роботи доцента кафедри системного аналізу і управління, кандидата фізико-математичних наук Коряшкіної Лариси Сергіївни в рамках науково-дослідної теми «Задачі моделювання, оптимізації та прийняття рішень в складних системах різної природи» (номер державної реєстрації 0121U109788, керівник к.т.н. Желдак Т.А.) використовуються у Національному технічному університеті «Дніпровська політехніка» в навчальному процесі підготовки студентів і аспірантів за напрямом 124 Системний аналіз при викладанні наступних дисциплін:

- **Методи оптимізації та дослідження операцій**, розділи: «Побудова математичних моделей оптимізаційних задач», «ЛПІ релаксація задач оптимізації з булевими змінними», «Методи недиференційованої оптимізації та їх використання на практиці», «Елементи теорії двоїстості»;
- **Моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів**, розділи: «Математичні моделі задач оптимального розміщення і покриття», «Моделювання торгових зон за допомогою діаграм Вороного»;
- **Оптимізаційні багатоступінні задачі розміщення-розподілу** (для аспірантів), розділи: «Математичні моделі оптимізаційних задач розміщення-розподілу і їх класифікація», «Багатоступінні задачі розподілення матеріальних потоків в транспортно-логістичних системах».

На основі наукових досліджень підготовлено лекційні матеріали та розроблені завдання до лабораторних робіт.

Декан факультету інформаційних
технологій, канд. техн. наук, доцент

Ірина УДОВИК

Завідувач кафедри системного аналізу
та управління, канд. техн. наук, доцент

Тимур ЖЕЛДАК



НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ГЕОТЕХНІЧНОЇ МЕХАНІКИ ім. М.С. Полякова

вул. Сімферопольська, 2А
м. Дніпро, 49005
код ЄДРПОУ 05411357

E-mail: office.igtm@nas.gov.ua
igtm@nas.gov.ua
tel. 38 050 5317375

« 17 » травня 2023 року
вих. № 311-22/11-1-3

на Ваш №

*Щодо впровадження результатів дисертаційного
дослідження*

**ДОВІДКА ПРО ВИКОРИСТАННЯ НАУКОВИХ РОЗРОБОК
Національного технічного університету «Дніпровська політехніка»
Міністерства освіти і науки України
(НТУ «Дніпровська політехніка» МОН України)**

Науково-практичні розробки спеціалістів кафедри системного аналізу та управління НТУ «Дніпровська політехніка» МОН України, у тому числі к.ф.-м.н., доцента Коряшкіної Л.С. «Методика оптимального розподілу матеріальних потоків між структурними елементами багатоетапного виробництва» і «Методика оптимального розміщення підрозділів системи екстреної логістики на випадок надзвичайних ситуацій» у вигляді комплексу алгоритмічного і програмного забезпечення розрахунків параметрів перерозподілу матеріальних потоків було передано до Інституту геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України для удосконалення існуючих транспортно-логістичних систем і технологій забезпечення екстреної логістики на гірничих підприємствах. Розроблені та наведені в методиках моделі і методи зонування і розміщення об'єктів в потокових системах є актуальними та орієнтовані на удосконалення й підвищення ефективного функціонування багаторівневих виробництв на етапах взаємодії структурних підрозділів при розподілі матеріальних потоків у транспортно-логістичних системах, при плануванні запобіжних заходів на випадок надзвичайних ситуацій техногенного характеру.

Вважаємо за необхідним розробку системного підходу згідно з сучасними тенденціями в гірничо-переробній галузі, а саме створення територіально-розподілених багаторівневих компаній, які включають в себе десятки великих підприємств і здійснюють повний цикл виробництва від видобутку сировини до її комплексного використання, з переробкою і транспортуванням до кінцевого споживача.

Таким чином, запропоноване алгоритмічне і програмне забезпечення дозволить провести оцінку виробничої потужності підприємств гірничо-металургійного комплексу, удосконалити створені системи екстреної логістики та підвищити їх надійність. Впровадження науково-практичних розробок к.ф.-м.н., доцента Коряшкіної Л.С. на гірничо-збагачувальних комбінатах дозволяє отримати економічний ефект в обсязі 163,4 тис. грн.

Довідку про використання результатів дисертаційних досліджень видано для представлення у спеціалізованій вченій раді.

Заступник директора
з наукової роботи,
чл.-кор. НАН України



Олександр КРУКОВСЬКИЙ

Зав. відділу
управління динамічними проявами
гірничого тиску,
д-р техн. наук, проф.

Сергій МІНЄВ



НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ПРИДНІПРОВСЬКИЙ НАУКОВИЙ ЦЕНТР

49005, м. Дніпро, а/с 484

Телефон/факс: +38 (067) 257-50-44
e-mail: office.psci@nas.gov.ua; <http://www.nas.gov.ua/prsc>

код ОКПО 01209713

вих. № 22 / 37 від 07.09.2022 р.

на № _____ від _____

Щодо впровадження результатів
дисертаційного дослідження

АКТ

**про використання комплексу методик і рекомендацій,
які розроблено в НТУ «Дніпровська політехніка» МОН України**

Підвищення ефективності реалізації програм створення та розвитку системи безпеки на об'єктах захисту та укриття, промислового і цивільного призначення є актуальним. На основі отриманих результатів науково-практичних досліджень підготовлено комплект методик і рекомендацій, які розроблено співробітниками кафедри системного аналізу та управління НТУ «Дніпровська політехніка» МОН України, у тому числі, к.ф.-м.н., доцентом Коряшкіною Л.С., а саме:

- «Методика оптимального розподілу матеріальних потоків між структурними елементами багатоетапного виробництва»;
- «Методика оптимального розміщення підрозділів системи екстреної логістики на випадок надзвичайних ситуацій»;
- «Методика раціонального вибору місць розміщення рятувальних служб на випадок техногенних аварій»;
- «Рекомендації щодо оптимального розміщення підрозділів логістичних систем та розподілу їх навантаження».

Розроблені моделі, методи і алгоритми, які представлено в комплекті методик і рекомендацій, дозволяють вирішувати цілу низку практичних проблем, що пов'язані з розробкою запобіжних дій і плануванням рятувальних

робіт для забезпечення безпеки населення у разі надзвичайних ситуацій та направлені на підвищення ефективності заходів щодо гуманітарної логістики. Результати даних методик і рекомендацій можуть використовуватися під час вирішення логістичних задач, пов'язаних з організацією первинної евакуації населення з постраждалих територій та його подальшого перевезення до центрів надання невідкладної допомоги.

Таким чином, використання розробок науковців кафедри системного аналізу та управління НТУ «Дніпровська політехніка» МОН України є суттєвим підґрунтям для забезпечення раціональної організації роботи підрозділів системи екстреної логістики в регіонах, постраждалих внаслідок надзвичайних ситуацій. За рахунок реалізації «Методики оптимального розміщення підрозділів системи екстреної логістики на випадок надзвичайних ситуацій» та «Рекомендацій щодо оптимального розміщення підрозділів логістичних систем та розподілу їх навантаження», які розроблені кандидатом фізико-математичних наук, доцентом Коряшкіної Л.С. економічний ефект складає 215,5 тис. грн.

Директор ПНЦ НАН України
МОН України
член-кореспондент НАН України



Учений секретар ПНЦ НАН України і
МОН України
д-р техн. наук

Борис БЛЮСС

Сергій ДЗЮБА

ЗАТВЕРДЖУЮ

Директор ТОВ «Шахтостроймонтаж»

доктор технічних наук

Олег ВІТУШКО

10 лютого

2022 р.



АКТ

**про використання комплексу методик та рекомендацій, розроблених в
Національному технічному університеті
«Дніпровська політехніка» МОН України**

Під час планування і ведення виробничих процесів в умовах гірничих підприємств ТОВ «Шахтостроймонтаж» використовуються «Методика оптимального розподілу матеріальних потоків між структурними елементами багатоетапного виробництва», «Методика раціонального вибору місць розміщення рятувальних служб на випадок техногенних аварій» і «Рекомендації щодо оптимального розміщення підрозділів логістичних систем та розподілу їх навантаження», які розроблено науковцями кафедри системного аналізу та управління Національного технічного університету «Дніпровська політехніка», у тому числі кандидатом фізико-математичних наук, доцентом Л.С. Коряшкіною.

Своєчасність і обґрунтованість прийняття рішень є запорукою ефективного управління матеріальними потоками на підприємствах паливно-енергетичного комплексу і гірничо-металургійної галузі на всіх етапах логістичного ланцюжку, починаючи від моменту видобутку корисних копалин, створення потоку і до надходження товарного концентрату кінцевому споживачеві. Тому в запропонованих методиках узгоджені локальні інтереси і цілі окремих структурних підрозділів багаторівневих гірничо-металургійних комбінатів із забезпеченням головної мети їх функціонування – зниження транспортних, часових і організаційних витрат. Методики оптимального розподілу потоків в багатоетапних транспортно-логістичних системах розроблено відповідно до загальних методологічних принципів досліджень і оптимізації складних систем.

В даний час на підприємствах ТОВ «Шахтостроймонтаж» з використанням методик розв'язуються задачі розподілу сировинних потоків, що дає можливість зменшувати сукупні витрати, пов'язані з управлінням рухом продукції протягом логістичного ланцюга. Тим самим забезпечується підвищення економічної ефективності функціонування підприємств багаторівневого виробництва.

Запропоновані методики і рекомендації дозволяють обґрунтувати та виважити управлінське рішення щодо розміщення структурних підрозділів системи екстреної логістики (СЕЛ) на територіях, які підпорядковані та прилеглі до гірничих підприємств, з урахуванням можливих матеріальних та часових витрат на надання екстреної допомоги. Удосконалення існуючої СЕЛ за рахунок оптимального розміщення нових об'єктів і перерозподілу навантаження на систему в цілому забезпечує завчасне формування планів з метою зниження впливу техногенних аварій. За рахунок реалізації методик та рекомендацій, розроблених канд. фіз.-мат. наук, доцентом Коряшкіною Л.С. економічний ефект складає 364,5 тис. грн.

Директор шахти



Іван ГРИЗДАК

Директор з економіки



Андрій ЮШКОВ

ЗАТВЕРДЖУЮ



Директор
ТОВ «Донбассшахтопроект»
канд. техн. наук

Микола ВОСТРЕЦОВ

«20» 05 2023 р.

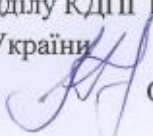
ДОВІДКА

про використання науково-технічних розробок
Національного технічного університету
«Дніпровська політехніка» МОН України

Комплект методик та рекомендації, які розроблено науковими співробітниками кафедри системного аналізу та управління НТУ «Дніпровська політехніка» МОН України, у тому числі к.ф.-м.н., доцентом Коряшкіною Л.С., а саме: «Методика раціонального вибору місць розміщення рятувальних служб на випадок техногенних аварій», «Методика оптимального розміщення підрозділів системи екстреної логістики на випадок надзвичайних ситуацій» і «Рекомендації щодо оптимального розміщення підрозділів логістичних систем та розподілу їх навантаження» у вигляді методичного і алгоритмічного забезпечення розрахунків параметрів логістичних процесів передано до ТОВ «Донбассшахтопроект» з метою підвищення ефективності його функціонування.

Актуальність даних наукових досліджень та отриманих результатів пов'язана з оптимізацією процесів розподілу матеріальних потоків у транспортно-логістичній системі, елементами якої є підрозділи гірничих підприємств, а саме: транспортних підрозділів, складів готової продукції, териконів, збагачувальних фабрик і проектно-технологічні ланки устаткування та інш. У цих рекомендаціях розроблено механізм управління сировинними потоками з метою зменшення супутніх витрат. У методиках показано, що одним із важливих чинників є визначення умов забезпечення зниження транспортних та організаційних витрат, що пов'язані з процесами розподілу матеріальних потоків між структурними підрозділами гірничих підприємств і споживачами їх продукції.

Вважаємо, що використання підходів, які запропоновані в науково-практичних методиках НТУ «Дніпровська політехніка» дозволє формувати ефективне управління системами розподілу матеріально-сировинних потоків у гірничих технологіях. Обґрунтування планів гірничих робіт з урахуванням оптимального розташування центрів постачання і розподілу навантаження на об'єкти системи екстреної логістики на основі методик та рекомендації, дозволяє удосконалити та раціонально організовувати процеси у разі надзвичайних ситуацій стихійного або техногенного характеру.

Завідувач відділу КДПГТ
ІГТМ НАН України
д.т.н., проф.  Сергій МІНЄВ



Доцент кафедри
системного аналізу та управління
НТУ «Дніпровська політехніка» МОН України
к. ф.-м. н.  Лариса КОРЯШКІНА

**ДОДАТОК В. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ
ДИСЕРТАЦІЇ ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ
ДИСЕРТАЦІЇ**

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті у наукових виданнях, включених до Переліку наукових фахових видань України:

1. Коряшкіна Л.С. Розширення одного класу нескінченновимірних оптимізаційних задач / Л.С. Коряшкіна // Вісн. Черкаського ун-ту. Сер. Прикл. матем. Інф. – 2015. – № 18 (351). – С. 28 – 36.
2. Koriashkina L.S. Continuous problems of optimal multiplex-partitioning of sets without constraints and solving methods / L.S. Koriashkina, A.P. Cherevatenko // Journal of Computational & Applied Mathematics. – 2015. – № 2 (119). – P. 15 – 32.
3. Коряшкіна Л.С. Неперервні лінійні задачі оптимального мультиплексного розбиття множин з обмеженнями / Л.С.Коряшкіна, А.П. Череватенко // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, Серія «Мат. моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», 2015. – Вип. 28. – С. 77 – 91.
4. Koriashkina L.S. The problem of multi-zone dynamics systems parametric identification / L.S. Koriashkina, A.P. Cherevatenko // System technologies. N 4(99) – Dnipropetrovsk, 2015.– P.88 – 101.
5. Коряшкіна Л. С. Оптимальні діаграми Вороного вищих порядків обмежених множин та алгоритми їх побудови / Л.С. Коряшкіна, А.П. Череватенко // Вісник Черкаського університету. Серія Прикладна математика. Інформатика. – 2016. – №. 1 – 2. – С. 59 – 76.
6. Коряшкіна Л.С. Інтеграція ГІС-технологій і методів розв'язання неперервних задач оптимального мультиплексного розбиття множин / Л.С. Коряшкіна, А.П. Череватенко, Е.О. Коряшкіна // Системні дослідження та інформаційні технології, 2017, № 4. С. 97–108. DOI:10.20535/SRIT.2308-8893.2017.4.08
7. Коряшкіна Л.С. Моделювання зон сервісного обслуговування на заданій території / Л.С. Коряшкіна, М.М. Одновол, А.П. Череватенко, О.О. Михальова // Вісник Херсонського національного технічного університету. – Херсон: ХНТУ, 2017. – Вип. 3(62). Т. 2. – С.109–117.
8. Коряшкіна Л.С. Інтерактивна карта оптимального мультиплексного розбиття заданого регіону / Л.С. Коряшкіна, О.О. Михальова, Б.Р. Свіріпа, А.П. Череватенко // Збірник наукових праць Національного гірничого університету / Нац. гірн. ун-т. – Дніпро: Вид-во НГУ, 2018. – № 55. – С. 274 – 287.

9. Khabarlak K.S. Mobile access control system based on RFID tags and facial information / K.S. Khabarlak, L.S. Koriashkina // Bulletin of National Technical University “KhPI”. Series: System Analysis, Control and Information Technologies. – 2020. – Vol. 2. – № 4. – P. 69-74. – DOI: 10.20998/2079-0023.2020.02.12.

10. Коряшкіна Л. Алгоритми територіальної сегментації для мережі сервісних центрів з перекриттям зон обслуговування / Л. Коряшкіна, М. Сазонова, М. Одновол // Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security. – 2023. – № 2. С. – 12 – 25.

11. Дзюба С. Математичні моделі оптимізаційних задач частково-двоетапної евакуації населення із зонуванням постраждалої території / С. Дзюба, Л. Коряшкіна, О. Станіна, Лубенець Д. // Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security, 2023. – № 3. – С. 13 – 21.

12. Коряшкіна Л. С. Математичні моделі та методи розміщення об’єктів із зонуванням території в системах екстреної логістики / Л.С. Коряшкіна, С.В. Дзюба // System technologies, 2023. Vol. 6, No. 149.– P.107 – 122.

13. Коряшкіна Л.С. Математичні моделі та методи мультиплексного розбиття і багатократного покриття множин для задач розміщення-розподілу / Л. Коряшкіна, Д. Лубенець // Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security. – 2023. – № 4. С. – 12 – 25.

14. Коряшкіна Л.С. Системний аналіз та математичне моделювання частково-двоетапних процесів розподілу матеріальних потоків / Л. Коряшкіна, Д. Лубенець // System technologies, 2024. Vol. 1, No. 150.– P.86 – 99. DOI 10.34185/1562-9945-1-150-2024-08

Статті у періодичних виданнях, включених до категорії «А» Переліку наукових фахових видань України, або у закордонних виданнях, проіндексованих у базах даних Web of Science Core Collection та/або Scopus:

15. Koriashkina L.S. One way to solve problems of multi-zone dynamics models identification / L.S. Koriashkina, A. Pravdivy, A.P. Cherevatenko. – Power Engineering, Control & Information Technologies in Geotechnical Systems – CRC Press/ Balkema - Taylor & Francis Group. – 2015. – P. 153 – 160. (**Scopus**)

16. Cheberiachko Yu.I. Developing a mathematical model of linkage parameters of air flow in a filter box / Yu.I. Cheberiachko, I.M.Cheberiachko, M.M.Odnovol, L.S.Koriashkina // Scientific Bulletin of National Mining University, 2019. – № 3. – С. 99 – 105. (**Scopus Q2**)

17. Khabarлак K.S. Scoping adversarial attack for improving its quality / K.S. Khabarлак, L.S. Koriashkina // Radio Electronics, Computer Science, Control. – 2019. – № 2. – P. 108-118. – DOI: 10.15588/1607-3274-2019-2-12. (**Web of Science Q3**)
18. Koriashkina L.S. On the influence of the number of aggregates and free particles on the subsidence of loess soils / L.S. Koriashkina, T.P. Mokritska, O.V. Bondar, M.M. Odnovol // Scientific Bulletin of National Mining University, 2018. – № 5. – C. 5 – 12. <https://doi.org/10.29202/nvngu/2018-5/2> (**Scopus Q3, Web of Science**)
19. Us S. A. An optimal two-stage allocation of material flows in a transport-logistic system with continuously distributed resource / S.A. Us, L.S. Koriashkina, O.D. Stanina // Radio Electronics, Computer Science, Control, 2019. – Issue 1. – P. 256 – 268. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2019-1-24> (**Web of Science Q3**)
20. Koriashkina L.S On determining productive capacity of EV traction battery repair area / L.S. Koriashkina, O.V. Deryugin, S.O.Fedoriachenko, S.I. Cheberiachko, M.A. Vesela // Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu, 2019. – № 5. – C. 113 – 121. <https://doi.org/10.29202/nvngu/2019-5/17> (**Scopus Q3**)
21. Bulat A. Solution of the problem to optimize two-stage allocation of the material flows / A. Bulat, S. Dziuba, S. Minieiev, L. Koriashkina, S. Us // Mining of Mineral Deposits, Vol. 14 (2020), Issue 1, 27 – 35. doi.org/10.33271/mining14.01.027 (**Scopus Q2, Web of Science**)
22. Koriashkina L.S. Rational organization of the work of an electric vehicle maintenance station / L.S. Koriashkina, S.I. Cheberiachko, O.V. Deryugin, M.M. Odnovol // Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu, 2020. – № 14(1). – P. 27-35. (**Scopus Q2, Web of Science**)
23. Avramenko S.E. Guided hybrid genetic algorithm for solving global optimization problems / S.E. Avramenko, T.A. Zheldak, L.S. Koriashkina // Radio Electronics, Computer Science, Control. – 2021. – № 2. – P. 174 – 188. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2021-2-18>. (**Web of Science Q3**)
24. Khabarлак K. Fast facial landmark detection and applications: A survey / K. Khabarлак, L. Koriashkina // Journal of Computer Science and Technology. – 2022. – Vol. 22. – № 1. – P. 12-41. – DOI: 10.24215/16666038.22.e02. (**Scopus Q2, Web of Science**)
25. Bazaluk O. Functional Resonance Analysis Method for Incident Risk Assessment During Passenger Road Transportation. / Bazaluk, O., Koriashkina, L.,

Cheberyachko, S., Deryugin, O., Odnovol, M., Lozynskyi, V., Nesterova, O.
DOI: 10.1016/j.heliyon.2022.e11814 (*Scopus Q1, Web of Science*)

26. Koriashkina L. Two-stage problems of optimal location and distribution of the humanitarian logistics system's structural subdivisions / L. Koriashkina, S. Us, M. Odnovol, O. Stanina, S. Dziuba // *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*, 2024. – № 1. P. 130 – 139. <https://doi.org/10.33271/nvngu/2024-1/130> (*Scopus Q3, Web of Science*)

Монографії (розділи у колективних монографіях):

27. Станіна О.Д. Моделі та методи розв'язання задач оптимального розміщення двоетапного виробництва з неперервно розподіленим ресурсом: монограф. / О.Д. Станіна, С.А. Ус, Л.С. Коряшкіна / Дніпро, вид-ць «Свідлер А.Л.», 2021. – 200 с.

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

28. Коряшкіна Л.С. Про розв'язання неперервних задач оптимального мультиплексного розбиття множин з обмеженнями / Л.С. Коряшкіна, А.П. Череватенко // 36. наук. праць XXI Всеукраїнської наук. конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (АРАМС – 2015), 24 – 25 вересня 2015 р. – Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2015. – С. 189 – 190.

29. Коряшкіна Л.С. Неперервна задача багатократного мінімального кульового покриття із «регуляризацією» функціоналу / Л.С. Коряшкіна, О.О. Михальова // Тези доповідей Міжнародної наукової школи-семінару «Питання оптимізації обчислень». – 21 – 25 вересня 2015.

30. Коряшкіна Л.С. Узагальнення одного класу задач нескінченновимірною математичного програмування / Л.С. Коряшкіна // Математичне та імітаційне моделювання систем. МОДС 2015: тези допов. Десятої міжнар. наук.-практ. конф., 22 – 26 червня 2015 р. – Чернігів: ЧНТУ, 2015. – С. 160 – 164.

31. Михальова О.О. Задачі оптимального багатократного кульового покриття та мультиплексне розбиття множин / О.О. Михальова, Л.С. Коряшкіна // 36. наук. праць XXI Всеукраїнської наук. конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (АРАМС – 2015), 24–25 вересня 2015 р. – Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2015. – С. 227 – 229.

32. Коряшкіна Л.С. Метод розв'язання неперервної лінійної задачі оптимального мультиплексного розбиття множин з обмеженнями / Л.С. Коряшкіна, А.П. Череватенко //

36. праць Другої Всеукраїнської наук.-техніч. конф. "Інформатика, управління та штучний інтелект (ІУШІ-2015)", 26 – 27 листопада 2015 р. Харків : НТУ "ХПІ", 2015. – С. 39.

33. Коряшкіна Л.С. Про один підхід до територіальної сегментації ринку послуг / Л.С. Коряшкіна, А.П. Череватенко // Сучасні інформаційні та комунікаційні технології на транспорті, в промисловості та освіті: зб. матеріалів Міжнар. наук.-практ. конф., 16 – 17 грудня 2015 р. – Дн-ск: ДНУЗТ ім. В.А. Лазаряна, 2015. – С. 81.

34. Коряшкіна Л.С. Оптимальні діаграми Вороного вищих порядків обмежених множин та алгоритми їх побудови / Л.С. Коряшкіна, А.П. Череватенко // Математичне та імітаційне моделювання систем. МОДС 2016 : тези доповідей Одинадцяті міжнародної науково-практичної конференції (Жукин, 27 червня - 1 липня 2016 р.) / М-во осв. і наук. України, Нац. Акад. наук України, Академія техно-логічних наук України, Інженерна академія України та ін. - Чернігів : ЧНТУ, 2016. – С. 332 – 334.

35. Коряшкіна Л.С. Про програмну реалізацію алгоритмів оптимального мультиплексного розбиття множин сумісно з ГІС- технологіями під час розв'язання задач сегментації ринку послуг / Л.С. Коряшкіна, А.П. Череватенко // Сучасні інформаційні та комунікаційні технології на транспорті, в промисловості та освіті, 14 – 15 грудня 2016 р.: Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції. - Д.: ДНУЖДТ ім. Лазаряна, 2016. - С. 52 – 53.

36. Коряшкіна Л.С. Моделювання зон сервісного обслуговування у заданому регіоні / Л.С. Коряшкіна, А.П. Череватенко, Н.Н. Одновол, О.О. Міхальова // XVIII Міжнародна конференція з математичного моделювання (МКММ-2017) [Збірка тез (18-22 вересня 2017 р., м. Херсон)]. – Херсон: ХНТУ, 2017. – С. – 20 – 21.

37. Коряшкіна Л.С. Моделювання зон сервісного обслуговування на заданій території / Л.С. Коряшкіна, А.П. Череватенко // Проблеми інформатики та моделювання (ПІМ-2017). Тезиси сімнадцятої міжнародної науково-технічної конференції. – Харків: НТУ "ХПІ", 2017. – С. 43.

38. Череватенко А.П. Інформаційна технологія територіальної сегментації ринку послуг / А.П. Череватенко, Л.С. Коряшкіна // Комп'ютерне моделювання та оптимізація складних систем (КМОСС-2019): матеріали V Міжнародної науково-технічної конференції (м. Дніпро, 6-8 листопада 2019 року) / Міністерство освіти і науки України, Державний вищий навчальний заклад «Український державний хіміко-технологічний університет». – Дніпро: Баланс-клуб, 2019. – С. 226 – 227.

39. Ус С.А. Моделювання й оптимізація двоетапного транспортування ресурсу, неперервно розподіленого на заданій території / С.А. Ус, Л.С. Коряшкіна, О.Д. Станіна // Сучасні проблеми і досягнення в галузі радіотехніки, телекомунікацій та інформаційних технологій : Тези доповідей IX Міжнародної науково-практичної конференції (03–05 жовтня 2018 р., м. Запоріжжя) [Електронний ресурс] / Редкол. : Д. М. Піза, С. В. Морщавка. Електрон. дані. – Запоріжжя : ЗНТУ, 2018. – 1 електрон. опт. диск (DVD-ROM); 12 см. – С. 269 – 271.

40. Koriashkina L. Interactive map of optimal multiplex-partitioning of a given region / L. Koriashkina, A. Mikhalova, B. Sviripa, A. Cherevatenko // Information control systems and technologies: materials of the VII international scientific-practical conference (17th - 18 th september 2018, Odessa) / response for the publ.: V.V. Vychuzhanin. – Odessa: astroprint, 2018. – p. 236 – 239.

41. Ус С.А. Двоетапна неперервно-дискретна задача розподілу за наявністю фіксованих ланцюгів поставок / С.А. Ус, Л.С. Коряшкіна, О.Д. Станіна // Міжнародний науковий сімпозум «Інтелектуальні рішення». Теорія прийняття рішень: праці міжнар. школи-семінару, 15-20 квітня 2019 р., Ужгород / М-во освіти і науки України, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», та [ін]; наук. ред. Л.Ф.Гуляницький // Ужгород. – 2019 – С. 125 –126.

42. Blyuss B. An optimal two-stage distribution of material flow at the fuel and energy complex enterprises / B. Blyuss, L. Koriashkina, S. Us, S. Minieiev, S. Dziuba // E3S Web of Conferences, 109 (2019), International Conference Essays of Mining Science and Practice, Dnipro, Ukraine, June 25-27, 2019, <https://doi.org/10.1051/e3sconf/201910900008> (індексована в наукометричній базі Scopus)

43. Міщенко М.І. Оптимізація логістичних зв'язків в системі двоетапного транспортування ресурсу, неперервно розподіленого на заданій території / М.І. Міщенко, Л.С. Коряшкіна, С.А. Ус, С.В. Дзюба // Транспортний комплекс України: Умови ефективного розвитку: матеріали VII Всеукр. Наук.-практ. Конф. М. Одеса, 2019, 31–33.

44. Коряшкіна Л.С. Перерозподіл навантаження в системі екстреної логістики за рахунок оптимального розміщення її нових підрозділів / Л.С. Коряшкіна, С.В. Дзюба // International scientific-practical conference “Modern trends and prospects for the development of science, education and society”: conference proceedings (Aarhus, Denmark, August 10, 2023). Aarhus, Denmark: Scholarly Publisher ICSSH, 2023. – С. 42 – 43.

45. Дзюба С.В. Обґрунтування розподілу елементів транспортно-логістичних систем у промислових регіонах України / Л.С. Коряшкіна, С.В. Дзюба // Потураївські читання: матеріали XX міжнарод. наук.-техн. конф., 27.01.2023 р. м. Дніпро: НТУ Дніпровська політехніка. 2023. – С.23.

46. Сазанська І. О. Оптимізація процесу формування маршрутів із застосуванням алгоритму GRASP / І. О. Сазанська, Л.С. Коряшкіна // Інформаційні технології: теорія і практика: Тези доповідей VI-ї Всеукраїнської науково-практичної інтернет-конференції здобувачів вищої освіти і молодих учених, 2023 р., м. Харків) [Електронний ресурс] / Редкол.: М. В. Новожилова, І.О. Яковлева, Н.М. Братерська, Г.В. Бакурова, Т.А. Желдак. Електрон. дані. – Харків : ХНУМГ імені О.М.Бекетова, 2023. – 1 електрон. опт. диск (DVD-ROM); 12 см. – С. 64 – 68.

47. Дзюба С.В. Моделювання багатоетапних процесів гуманітарної логістики / С.В. Дзюба, Л.С. Коряшкіна, Д. Кругліков // Матеріали II Міжнародної науково-практичної конференції «Логістика і транспортна безпека: проблеми та перспективи розвитку в контексті аналізу сучасних викликів і загроз», м. Дніпро, 09.11.2023. – С. 74 – 79.

48. Коряшкіна Л.С. Інформаційна технологія територіальної сегментації в системах екстреної логістики / Л.С. Коряшкіна // Сучасні виклики та актуальні проблеми науки, освіти, технологій та суспільства: збірник тез доповідей міжнародної науково-практичної конференції (Біла Церква, 1.11.2023 р.): у 2 ч. Біла Церква: ЦФЕНД, 2023. Ч. 2. – С. 50 – 52.

49. Koriashkina L.S. Optimal choice of the objects for emergency service placement with area zoning: models and methods / L.S. Koriashkina // International scientific-practical conference “Science, education and technology: global trends and the regional aspect”: collection of materials (Tampere, Finland, February 3, 2024). Tampere, Finland: Scholarly Publisher ICSSH, 2024. – P. 43 – 44.

50. Дзюба С.В. Обґрунтування механізму управління логістичними потоками промислових підприємств. / С.В. Дзюба, Л.С. Коряшкіна // Потураївські читання: матеріали XXI міжнародної наук.-практ. Конф., м. Дніпро, 2020, Дніпро, НТУ Дніпровська політехніка, 18. – С. 25–26.

51. Лубенець Д.Є. Використання GIS технологій при розв’язанні оптимізаційних задач гуманітарної логістики / Д.Є. Лубенець, Л.С. Коряшкіна // Всеукраїнська інтернет-конференція «Економічна кібернетика: інструменти і

методи дослідження та організації економічних процесів»: матеріали конференції (м. Дніпро, 1–2 березня, 2024). – С. 55–60.

Наукові праці, які додатково відображають наукові результати дисертації

52. Коряшкіна Л.С. Свідоцтво 64326 Україна про реєстрацію авторського права на твір Комп'ютерна програма “OPTIMAL MULTIPLEX-PARTITIONING OF SETS” (OMPS-2015) [Текст] / Л.С. Коряшкіна, А.П. Череватенко (Україна). – № 64838; заявлено 31.12.15; зареєстровано 01.03.16 в Державному реєстрі свідоцтв про реєстрацію авторського права на твір.

53. Zelentsov D. Solving Continual Two-Stage Problems of Optimal Partition of Sets / D. Zelentsov, S. Us, L. Koryashkina, O. Stanina // International Journal of Research Studies in Computer Science and Engineering (IJRSCSE) Volume 4, Issue 4, 2017, 72–80. DOI: 10.20431/2349-4859.0404009 (*Index Copernicus*)

54. Koriashkina L. The continuous problems of the optimal multiplex partitioning an application of sets / L. Koriashkina, A. Cherevatenko, O. Mykhalova. – Power Engineering and Information Technologies in Technical Objects Control – Pivnyak, Beshta & Alekseyev (eds). – Taylor & Francis Group, London. – 2016. – P. 233 – 239.

55. Коряшкіна Л.С. Визначення оптимальної кількості та місць розміщення зарядних станцій для електромобілів на території міста / Л. С. Коряшкіна, О. Р. Беляєв // Комп'ютерне моделювання: аналіз, управління, оптимізація. – 2019. – № 1. – С. 23–29. DOI: 10.32434/2521-6406-2019-5-1-23-29 (*Index Copernicus*)

УКРАЇНА



СВІДОЦТВО

про реєстрацію авторського права на твір

№ 112849

Монографія «Моделі та методи розв'язання задач оптимального розміщення двоетапного виробництва з неперервно розподіленим ресурсом»

(вид, назва твору)

Автор(и) Станіна Ольга Дмитрівна, Ус Світлана Альбертівна, Коряшкіна Лариса Сергіївна

(повне ім'я, псевдонім (за наявності))

Твір оприлюднено: **Опублікування: Станіна О. Д. Моделі та методи розв'язання задач оптимального розміщення двоетапного виробництва з неперервно розподіленим ресурсом: моногр. / О. Д. Станіна, С. А. Ус, Л. С. Коряшкіна / Дніпро: Дніпропетровський державний університет внутрішніх справ, 2021. 200 с.**

(відомості про факт і дату оприлюднення твору)

Дата реєстрації 4 травня 2022 р.

Т.в.о. Генерального директора
Державного підприємства
«Український інститут
інтелектуальної власності»

Петро ІВАНЕНКО



УКРАЇНА



ДЕРЖАВНА СЛУЖБА

ВЛАСНОСТІ УКРАЇНИ

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОЇ

СВІДОЦТВО

про реєстрацію авторського права на твір

№ 64326

Комп'ютерна програма "OPTIMAL MULTIPLEX-PARTITIONING OF SETS"
("OMPS-2015")

(вид, назва твору)

Автор(и) Коряшкіна Лариса Сергіївна, Череватенко Антоніна Павлівна

(повне ім'я, псевдонім (за наявності))

Дата реєстрації

01.03.2016



Голова Державної служби
інтелектуальної
власності України
В.о. Голови А.А. Малиш

ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

Основні наукові, теоретичні положення та практичні результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на:

– **Міжнародних наукових, науково-технічних і науково-практичних конференціях:** XVIII Міжнародній конференції з математичного моделювання, МКММ-2017 (Херсон, 2017); «Сучасні проблеми і досягнення в галузі радіотехніки, телекомунікацій та інформаційних технологій» (Запоріжжя, 2018); «Математичне та імітаційне моделювання систем», МОДС (Чернігів, 2015, 2016); «Сучасні інформаційні та комунікаційні технології на транспорті, в промисловості та освіті», (Дніпропетровськ, 2015, 2016); «Проблеми інформатики та моделювання», ПІМ-2017 (Харків, 2017); «Комп'ютерне моделювання: аналіз, управління, оптимізація» (Дніпро, 2019); «Information control systems and technologies» (Odessa, Ukraine, 2018); E3S Web of Conferences, International Conference Essays of Mining Science and Practice, (Dnipro, Ukraine, 2019); «Потураївські читання» (Дніпро, 2023, 2024); «Сучасні тенденції та перспективи розвитку науки, освіти та суспільства» (Орхус, Данія, 2023); II Міжнародній науково-практичній конференції «Логістика і транспортна безпека: проблеми та перспективи розвитку в контексті аналізу сучасних викликів і загроз», (м. Дніпро, 2023); Міжнародній науково-практичній конференції «Сучасні виклики та актуальні проблеми науки, освіти, технологій та суспільства» (Біла Церква, Україна, 2023); International scientific-practical conference «Science, education and technology: global trends and the regional aspect» (Tampere, Finland, February 3, 2024).

– **Міжнародному науковому симпозіумі** «Інтелектуальні рішення». Теорія прийняття рішень (Ужгород, 2019);

– **Міжнародній науковій школі - семінару** “Питання оптимізації обчислень (ПОО-XLII)”, присвячена 85-річчю від дня народження академіка В.С. Михалевича (Чинадієво, 2015);

– **Всеукраїнських науково практичних конференціях:** «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики», АРАМС – 2015 (Львів, 2015); «Інформатика, управління та штучний інтелект», ІУШІ-2015, (Харків, 2015); «Транспортний комплекс України: Умови ефективного розвитку» (Одеса, 2019); VI-й Всеукраїнській науково-практичній інтернет-конференції здобувачів вищої освіти і молодих учених, 2023 р., м. Харків; Всеукраїнській інтернет-конференції «Економічна кібернетика: інструменти і методи дослідження та організації економічних процесів» (м. Дніпро, 1–2 березня, 2024).

**ДОДАТОК Г. ФРАГМЕНТИ ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ,
СТВОРЕНОГО МОВОЮ C# У СЕРЕДОВИЩІ VISUAL STUDIO ДЛЯ
РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО МУЛЬТИПЛЕКСНОГО
РОЗБИТТЯ МНОЖИН**

```

using System;
using System.Collections.Generic;
using System.Linq;
using System.Text;

namespace Построение диаграмм
{
    public sealed class RAlg_for_Multiplex2
    {
        private static int maxn = 500; // max количество переменных
        private static int intt = 1;
        private static int iis = 1;
        private static int alp = 3;
        private static int ii = 1;
        private static int ks = 1000;
        private static double sx = 0.00001;
        private static double sg = 0.00001;
        private static int h = 1;
        private static int nh = 3;
        private static double q1 = 0.9;
        private static double q2 = 1.1;
        private static int Q;
        private static int LL;
        private static int l_min;
        public static double myDelta = 1e-2;
        public static double FF;
        private static double[] g = new double[maxn];
        private static double[] g2 = new double[maxn];
        public static double[] x = new double[maxn];
        public static double[] VV = new double[maxn];
        public static double[] Sum_B = new double[LL];
        public static int[,] Comb = new int[LL, Q];
        private static double f;
        public static int c;
        private static double sqr(double val)
        {
            return Math.Pow(val, 2);
        }
        private static int factorial(int c)
        {
            int factor = 1;
            for (int i = 1; i < c + 1; i++) { factor *= i; }
            if (c == 0) { factor = 1; }
            return factor;
        }
        private static double Distance(int T, double xx, double yy, double tx, double ty, double ai, double bi,
            double p_Minkovsky)
        {
            double Distance = 0;
            if (T == 1)
            {
                Distance = (Math.Pow(Math.Pow(Math.Abs(xx - tx), p_Minkovsky) +
                    (Math.Pow(Math.Abs(yy - ty), p_Minkovsky)), Convert.ToDouble(1 / p_Minkovsky)));
            }
            if (T == 2)
            {

```



```

        Distance = (Math.Pow(Math.Pow(Math.Abs(xx - tx), p_Minkovsky) +
(Math.Pow(Math.Abs(yy - ty), p_Minkovsky)), Convert.ToDouble(1 / p_Minkovsky))) + ai;
    }
    if (T == 3)
    {
        Distance = (Math.Pow(Math.Pow(Math.Abs(xx - tx), p_Minkovsky) +
(Math.Pow(Math.Abs(yy - ty), p_Minkovsky)), Convert.ToDouble(1 / p_Minkovsky))) * ai;
    }
    if (T == 4)
    {
        Distance = (Math.Pow(Math.Pow(Math.Abs(xx - tx), p_Minkovsky) +
(Math.Pow(Math.Abs(yy - ty), p_Minkovsky)), Convert.ToDouble(1 / p_Minkovsky))) / ai + bi;
    }
    if (T == 5)
    {
        Distance = (Math.Pow((xx - tx), 2) + (Math.Pow((yy - ty), 2))) - ai;
    }
    if (T == 6)
    {
        Distance = (Math.Pow(Math.Pow(Math.Abs(xx - tx), p_Minkovsky) +
(Math.Pow(Math.Abs(yy - ty), p_Minkovsky)), Convert.ToDouble(1 / p_Minkovsky))) / ai + bi;
    }
    return Distance;
}

private static void FUNCT(ref double f_1, ref double[] x_1, ref double[] g_1, double p_)
{
    double c_;
    f_1 = 0;
    for (int i = 0; i < c; i++)
    {
        f_1 -= VV[i] * x_1[i];
        g_1[i] = -VV[i];
        if (x_1[i] < 0) { f_1 += x_1[i] * 1000000000; g_1[i] += 1000000000; }
    }
    for (int i = 0; i < Form1.cc; i++)
    {
        for (int j = 0; j < Form1.cc; j++)
        {
            List<double> ce = new List<double>();
            List<int> ind_Sort = new List<int>();
            double amin = 100000000000;
            for (int l = 0; l < LL; l++)
            {
                c_ = 0;
                for (int qq = 0; qq < Q; qq++)
                {
                    c_ = c_ + Distance(Form1.Type_diagram, (i * Form1.C), (j * Form1.C),
Form1.TauX[Comb[l, qq]], Form1.TauY[Comb[l, qq]], Form1.Aw[Comb[l, qq]], Form1.Bw[Comb[l,
qq]], p_) +
                    VV[Comb[l, qq]] * x_1[Comb[l, qq]] / Sum_B[l];
                    if (c_ < amin) { amin = c_; l_min = l; }
                }
                f_1 += amin * Form1.Ro_X[i, j];
                for (int qq = 0; qq < Q; qq++)
                {
                    g_1[Comb[l_min, qq]] += VV[Comb[l_min, qq]] * x_1[Comb[l_min, qq]] * Form1.C *
Form1.C * Form1.Ro_X[i, j] / Sum_B[l_min];
                }
            }
        }
    }
}

```

```

        Form1.itab_k[i, j, qq] = Comb[l_min, qq];
    }
}
}
f_1 = f_1 * Form1.C * Form1.C;
FF = f_1;
//-----
}
/// <summary>
/// R-алгоритм
/// </summary>
public static void R_Algorithm(double p_M)
{
    int k, k1, k2, ll;
    double sx1, sg1, h1, w, d, d1, dd;
    double[] g1 = new double[maxn];
    double[] z = new double[maxn];
    double[,] hh = new double[maxn, maxn];
    k = 0;
    h1 = ii * h;
    sx1 = RAlg_for_Multiplex2.sqr(sx);
    sg1 = RAlg_for_Multiplex2.sqr(sg);
    w = 1 / RAlg_for_Multiplex2.sqr(alp) - 1;
    ll = k + intt;
m_100:
    for (int i = 0; i < c; i++)
    {
        for (int j = 0; j < c; j++)
        {
            hh[i, j] = 0;
            hh[i, i] = 1;
        }
    }
    FUNCT(ref f, ref x, ref g, p_M);
    d = 0;
    for (int i = 0; i < c; i++)
        d = d + RAlg_for_Multiplex2.sqr(g[i]);
    if (d < sg1)
        return;
    for (int i = 0; i < c; i++)
    {
        g1[i] = g[i];
        z[i] = x[i];
    }
//-----
m_101:
    k = k + 1;
    for (int i = 0; i < c; i++)
        g2[i] = g1[i] - g[i];
    d = 0;
    for (int i = 0; i < c; i++)
        d = d + RAlg_for_Multiplex2.sqr(g2[i]);
    if (d > Math.Pow(10, -18))
    {
        for (int i = 0; i < c; i++)
        {
            g1[i] = 0;

```



```

        for (int j = 0; j < c; j++)
            g1[i] = g1[i] + hh[i, j] * g2[j];
    }
    d = 0;
    for (int i = 0; i < c; i++)
        d = d + g2[i] * g1[i];
    d = w / d;
    for (int i = 0; i < c; i++)
    {
        d1 = d * g1[i];
        for (int j = 0; j < c; j++)
            hh[i, j] = hh[i, j] + d1 * g1[j];
    }
}
for (int i = 0; i < c; i++)
    g1[i] = g[i];
for (int i = 0; i < c; i++)
{
    g[i] = 0;
    for (int j = 0; j < c; j++)
        g[i] = g[i] + hh[i, j] * g1[j];
    d = 0;
    for (int i = 0; i < c; i++)
        d = d + g1[i] * g[i];
    if (d < Math.Pow(10, -18))
    {
        d = 0;
        for (int i = 0; i < c; i++)
            d = d + RAlg_for_Multiplex2.sqr(x[i] - z[i]);
        d = Math.Sqrt(d);
        h1 = ii * d / nh;
        k = k - 1;
        goto m_100;
    }
    else
    {
        d = Math.Sqrt(d);
        for (int i = 0; i < c; i++)
            g[i] = g[i] / d;
        for (int i = 0; i < c; i++)
            z[i] = x[i];
        k1 = 0;
        k2 = 20;
m_103:
        for (int i = 0; i < c; i++)
            x[i] = x[i] + h1 * g[i];
        FUNCT(ref f, ref x, ref g2, p_M);
        k1 = k1 + 1;
        if (iis != 0 && k1 >= k2)
        {
            k2 = k2 + 20;
            Console.WriteLine("--");
            return;
        }
        if (k1 >= nh)
            h1 = h1 * q2;
        d = 0;
    }
}

```

```

    for (int i = 0; i < c; i++)
        d = d + g[i] * g2[i];
    if (d > 0)
        goto m_103;
    if (k1 <= 1)
        h1 = h1 * q1;
    for (int i = 0; i < c; i++)
        g[i] = g2[i];
    if (ll == k)
        ll = ll + intt;
    if (k >= ks)
        return;
    else
    {
        dd = 0;
        for (int i = 0; i < c; i++)
            dd = dd + RAlg_for_Multiplex2.sqr(g[i]);
        if (dd < sg1)
            return;
        else
        {
            d = 0;
            for (int i = 0; i < c; i++)
                d = d + RAlg_for_Multiplex2.sqr(x[i] - z[i]);
            if (d < sx1)
                return;
            else
            {
                d1 = Math.Abs(h1) - Math.Pow(10, 10);
                if (d1 <= 0)
                    goto m_101;
                else
                {
                    d = Math.Sqrt(d);
                    h1 = ii * d / nh;
                    goto m_100;
                }
            }
        }
    }
}
}
}
}

```

```

public void Sort_Distance(List<double> l, List<int> ind_a)
{
    double key;
    int key_ind;
    for (int j = 1; j < l.Count; j++)
    {
        key = l[j];
        key_ind = ind_a[j];
        int i = j - 1;
        while ((i >= 0) && (l[i] > key))
        {
            l[i + 1] = l[i];
            ind_a[i + 1] = ind_a[i];

```

```

        i--;
    }
    l[i + 1] = key;
    ind_a[i + 1] = key_ind;
}
}
public int min(List<double> l)
{
    double min_ = l[0];
    int min = 0;
    for (int i = 1; i < l.Count; i++)
    {
        if (min_ > l[i])
        {
            min_ = l[i];
            min = i;
        }
    }
    return min;
}

```

```

public void Diagram(int T, int N, List<double> Tx, List<double> Ty, List<double> ai, List<double>
bi)
{
    double sai;
    double S_limit;
    Ro_X = Ro();
    double f_comb;
    for (int i = 0; i < N; i++)
    {
        Tx[i] = TxII[i]/4;
        Ty[i] = TyII[i]/4;
        ai[i] = aII[i];
        bi[i] = bII[i];
    }
    double min_fun = 100000000;
    int[] CombinIndex = new int[N];
    S_limit = N * Convert.ToDouble(textBox6.Text);
    if (checkBox1.Checked == false) // без розміщення центрів
    {
        if (checkBox2.Checked == true) // з обмеженнями
        {
            for (int i = 0; i < N; i++)
            {
                Aw[i] = ai[i];
                Bw[i] = bi[i];
                TauX[i] = Tx[i];
                TauY[i] = Ty[i];
            }
            R_Algo_Form5_Restrict.SetStartPoint(vectorB);
            R_Algo_Form5_Restrict.R_Algorithm(p_());
            double[] nvectorX = R_Algo_Form5_Restrict.x;
            for (int i = 0; i < _Width; i++)
            {
                for (int j = 0; j < _Height; j++)
                {
                    List<double> ce = new List<double>();

```

```

List<int> ind_Sort = new List<int>();
for (int n = 0; n < N; n++)
{
    double c_ = 0;
    if (Ro_X[i, j] != 0)
    { c_ = C_x((i * C), (j * C), Tx[n], Ty[n]) * Ro_X[i, j]; }
    ce.Add(c_);
    ind_Sort.Add(n);
}
Sort_Distance(ce, ind_Sort);
for (int qq = 0; qq < N; qq++)
{ itab_k[i, j, qq] = ind_Sort[qq]; }
itab[i, j] = min(ce);
if (checkBox4.Checked == true)
{
    double Sum_Q = 0;
    for (int qq = 0; qq < Q_k; qq++)
    { Sum_Q += ce[qq]; }
    f_max += Sum_Q;
}
}
f_max = f_max * C * C;    // без розміщення з обмеженнями
}
else    // діаграма без розміщення центрів без обмежень
{
    int izN = M;
    int poK = N;
    int[] Array = new int[poK]; // Масив для збереження перестановок
    for (int i = 0; i < Array.Length; i++) Array[i] = i; // Заповнення масива
    sai = 0;
    for (int i = 0; i < N; i++)
    {
        Tx[i] = TxII[Array[i]]/4;
        Ty[i] = TyII[Array[i]]/4;
        ai[i] = aII[Array[i]];
        bi[i] = bII[Array[i]];
        sai += ai[i];
    }
    if (sai < S_limit)
    {
        f_comb = 0;
        R_l = -1;

        for (int i = 0; i < _Width; i++)
        {
            for (int j = 0; j < _Height; j++)
            {
                for (int qq = 0; qq < N; qq++)
                { itab_k[i, j, qq] = 0; }
                itab[i, j] = 0;
                if (Ro_X[i, j] != 0)
                {
                    List<double> ce = new List<double>();
                    List<int> ind_Sort = new List<int>();
                    for (int n = 0; n < N; n++)
                    {

```

```

        double c_ = 0;
        c_ = C_x((i * C), (j * C), Tx[n], Ty[n]);
        if (checkBox4.Checked == true)
            { c_ = c_ * Ro_X[i, j]; }
        ce.Add(c_);
        ind_Sort.Add(n);
    }

    Sort_Distance(ce, ind_Sort);
    for (int qq = 0; qq < N; qq++)
    { itab_k[i, j, qq] = ind_Sort[qq]; }
    if (checkBox4.Checked == true)
    {
        double Sum_Q = 0;
        for (int qq = 0; qq < Q_k; qq++)
        {
            Sum_Q += ce[qq];
        }
        f_comb += Sum_Q;
    }
    if (checkBox5.Checked == true)
    {
        if (R_l < ce[Q_k - 1])
        {
            R_l = ce[Q_k - 1];
            x_R_l = i;
            y_R_l = j;
            tauX_R_l = Tx[ind_Sort[Q_k - 1]];
            tauY_R_l = Ty[ind_Sort[Q_k - 1]];
            f_comb = R_l;
        }
    }
    itab[i, j] = min(ce);
}
}
}
if (checkBox4.Checked == true)
    { f_comb = f_comb * C * C; }
if (f_comb <= min_fun)
{
    min_fun = f_comb;
    for (int i = 0; i < Array.Length; i++) CombinIndex[i] = Array[i];
    if (checkBox4.Checked == true)
    {
        R_max = f_comb;
        x_R = x_R_l;
        y_R = y_R_l;
        tauX_R = tauX_R_l;
        tauY_R = tauY_R_l;
    }
}
}
while ((Array[0] != (izN - poK) || (Array[poK - 1] != izN - 1)))
{
    int j1 = -1;
    bool flag = true;
    while (flag)

```

```

{
    if ((j1 < (poK - 1)) && (Array[j1 + 1] < (izN - poK + j1 + 1))) j1++;
    else flag = false;
}
if (j1 != (-1))
{
    Array[j1]++;
    for (int q = j1 + 1; q < poK; q++)
        Array[q] = Array[q - 1] + 1;
    // _____
    sai = 0;
    for (int i = 0; i < N; i++)
    {
        Tx[i] = TxII[Array[i]]/4;
        Ty[i] = TyII[Array[i]]/4;
        ai[i] = aII[Array[i]];
        bi[i] = bII[Array[i]];
        sai += ai[i];
    }
    if (sai < S_limit)
    {
        f_comb = 0;
        R_l = -1;
        for (int i = 0; i < _Width; i++)
        {
            for (int j = 0; j < _Height; j++)
            {
                if (Ro_X[i, j] != 0)
                {
                    List<double> ce = new List<double>();
                    List<int> ind_Sort = new List<int>();
                    for (int n = 0; n < N; n++)
                    {
                        double c_ = 0;
                        c_ = C_x((i * C), (j * C), Tx[n], Ty[n]);
                        if (checkBox4.Checked == true)
                        { c_ = c_ * Ro_X[i, j]; }
                        ce.Add(c_);
                        ind_Sort.Add(n);
                    }
                    Sort_Distance(ce, ind_Sort);
                    for (int qq = 0; qq < N; qq++)
                    { itab_k[i, j, qq] = ind_Sort[qq]; }
                    if (checkBox4.Checked == true)
                    {
                        double Sum_Q = 0;
                        for (int qq = 0; qq < Q_k; qq++)
                        { Sum_Q += ce[qq]; }
                        f_comb += Sum_Q;
                    }
                }
            }
            if (checkBox5.Checked == true)
            {
                if (R_l < ce[Q_k - 1])
                {
                    R_l = ce[Q_k - 1];
                    x_R_l = i;
                    y_R_l = j;
                }
            }
        }
    }
}

```

```

        tauX_R_l = Tx[ind_Sort[Q_k - 1]];
        tauY_R_l = Ty[ind_Sort[Q_k - 1]];
        f_comb = R_l;
    };
}
    itab[i, j] = min(ce);
}
}
    progressBar1.Value = i;
}
if (checkBox4.Checked == true)
{ f_comb = f_comb * C * C; }
if (f_comb <= min_fun)
{
    min_fun = f_comb;
    for (int i = 0; i < Array.Length; i++) CombinIndex[i] = Array[i];
    if (checkBox4.Checked == true)
    {
        R_max = f_comb;
        x_R = x_R_l;
        y_R = y_R_l;
        tauX_R = tauX_R_l;
        tauY_R = tauY_R_l;
    }
}
}
}
else
{
    sai = 0;
    for (int i = 0; i < N; i++)
    {
        Tx[i] = TxII[Array[i]]/4;
        Ty[i] = TyII[Array[i]]/4;
        ai[i] = aII[Array[i]];
        bi[i] = bII[Array[i]];
        sai += ai[i];
    }
    if (sai < S_limit)
    {
        f_comb = 0;
        R_l = -1;
        for (int i = 0; i < _Width; i++)
        {
            for (int j = 0; j < _Height; j++)
            {
                if (Ro_X[i, j] != 0)
                {
                    List<double> ce = new List<double>();
                    List<int> ind_Sort = new List<int>();
                    for (int n = 0; n < N; n++)
                    {
                        double c_ = 0;
                        c_ = C_x((i * C), (j * C), Tx[n], Ty[n]);
                        if (checkBox4.Checked == true)
                        { c_ = c_ * Ro_X[i, j]; }
                    }
                }
            }
        }
    }
}
}

```

```

        ce.Add(c_);
        ind_Sort.Add(n);
    }
    Sort_Distance(ce, ind_Sort);
    for (int qq = 0; qq < N; qq++)
    { itab_k[i, j, qq] = ind_Sort[qq]; }
    if (checkBox4.Checked == true)
    {
        double Sum_Q = 0;
        for (int qq = 0; qq < Q_k; qq++)
        { Sum_Q += ce[qq]; }
        f_comb += Sum_Q;
    }
    if (checkBox5.Checked == true)
    {
        if (R_l < ce[Q_k - 1])
        {
            R_l = ce[Q_k - 1];
            x_R_l = i;
            y_R_l = j;
            tauX_R_l = Tx[ind_Sort[Q_k - 1]];
            tauY_R_l = Ty[ind_Sort[Q_k - 1]];
            f_comb = R_l;
        }
    }
    itab[i, j] = min(ce);
}
}

if (checkBox4.Checked == true)
{ f_comb = f_comb * C * C; }

if (f_comb <= min_fun)
{
    min_fun = f_comb;
    for (int i = 0; i < Array.Length; i++) CombinIndex[i] = Array[i];
    if (checkBox4.Checked == true)
    {
        R_max = f_comb;
        x_R = x_R_l;
        y_R = y_R_l;
        tauX_R = tauX_R_l;
        tauY_R = tauY_R_l;
    }
}

R_max = 100000000;
for (int i = 0; i < N; i++)
{
    Tx[i] = TxII[CombinIndex[i]]/4;
    Ty[i] = TyII[CombinIndex[i]]/4;
    ai[i] = aII[CombinIndex[i]];
    bi[i] = bII[CombinIndex[i]];
}
f_comb = 0;
R_l = -1;
for (int i = 0; i < _Width; i++)
{

```



```

for (int j = 0; j < _Height; j++)
{
    if (Ro_X[i, j] != 0)
    {
        List<double> ce = new List<double>();
        List<int> ind_Sort = new List<int>();
        for (int n = 0; n < N; n++)
        { double c_ = 0;
          c_ = C_x((i * C), (j * C), Tx[n], Ty[n]);
          if (checkBox4.Checked == true)
          { c_ = c_ * Ro_X[i, j]; }
          ce.Add(c_);
          ind_Sort.Add(n);
        }
        Sort_Distance(ce, ind_Sort);
        for (int qq = 0; qq < N; qq++)
        { itab_k[i, j, qq] = ind_Sort[qq]; }
        if (checkBox4.Checked == true)
        {
            double Sum_Q = 0;
            for (int qq = 0; qq < Q_k; qq++)
            { Sum_Q += ce[qq]; }
            f_comb += Sum_Q;
        }
        if (checkBox5.Checked == true)
        {
            if (R_l < ce[Q_k - 1])
            {
                R_l = ce[Q_k - 1];
                x_R_l = i;
                y_R_l = j;
                tauX_R_l = Tx[ind_Sort[Q_k - 1]];
                tauY_R_l = Ty[ind_Sort[Q_k - 1]];
            }
        }
        itab[i, j] = min(ce);
    }
}
progressBar1.Value = i;
}
if (checkBox5.Checked == true)
{ if (R_max > R_l)
  { R_max = R_l;
    x_R = x_R_l;
    y_R = y_R_l;
    tauX_R = tauX_R_l;
    tauY_R = tauY_R_l;
    f_max = R_max; } }
if (checkBox4.Checked == true)
{ f_comb = f_comb * C * C;
  f_max = f_comb; }
label14.Text = label14.Text + "Function: " + Convert.ToString(Math.Round(f_max, 3)) + " ";
}
}
}

```